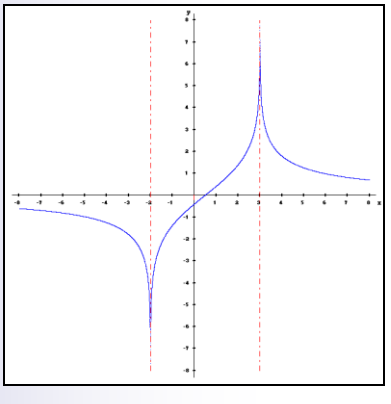
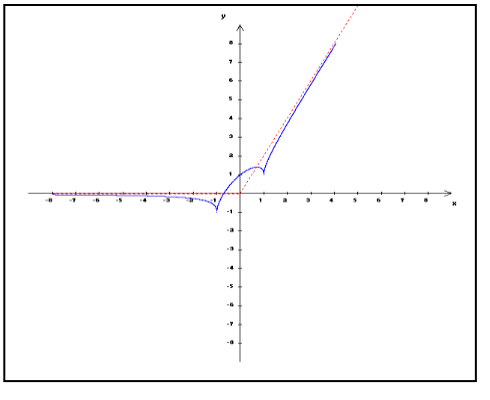
ODETE BRITO MOREIRA

ENSINO DE FUNÇÕES NO 3ºCICLO COM APLICAÇÃO DO SOFTWARE MATEMÁTICO MAPLE VIII





Licenciatura em Ensino de Matemática

ISE/2008

ODETE BRITO MOREIRA

TEMA:

ENSINO DE FUNÇÕES NO 3ºCICLO COM APLICAÇÃO Do SOFTWARE MATEMÁTICO MAPLE VIII

LICENCIATURA EM MATEMÁTICA

INSTITUTO SUPERIOR DE EDUCAÇÃO/ 2008

ODETE BRITO MOREIRA

ENSINO DE FUNÇÕES NO 3ºCICLO COM APLICAÇÃO Do SOFTWARE MATEMÁTICO MAPLE VIII

Trabalho Científico apresentado no ISE para obtenção do grau de Licenciatura em Ensino de Matemática, sob orientação da Mestre Astrigilda Pires Rocha Silveira.

O Júri,

____

/Presidente/

____

/Arguente/

____

/Orientadora/

________________, _____ de ______________ de 2008.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha querida Família.

AGRADECIMENTOS

A Deus por ter me dado a chance de chegar até aqui.

Deixo aqui expresso o meu elevado sentido de gratidão e reconhecimento a todos os professores do ISE e colegas de turma que de uma forma ou de outra, me ajudaram e apoiaram sempre, contribuindo assim, para que este modesto trabalho fosse realizado.

Um agradecimento especial vai para a Mestre Astrigilda Silveira, pessoa que merece a minha estima e consideração, pois, pôs-se à minha disposição, dando orientações, sugestões e disponibilizando fontes necessárias para a elaboração deste trabalho.

A todos, os meus sinceros agradecimentos.

" A matemática não mente, mente quem faz mau uso dela"

– **Albert Einstein**

ÍNDICE GERAL

Capítulo I - Introdução

1.1. Contexto do estudo

As Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NTIC) contribuem positivamente para a transformação do ensino e das Sociedades, proporcionando formas de trabalho alternativas e suficientemente aliciantes para que as aprendizagens se tornem cada vez mais significativas.

A interactividade do acesso às NTIC permite ao aluno tornar-se mais activo e interactivo, favorecendo assim um maior envolvimento dos mesmos no processo de ensino e aprendizagem, permitirem o trabalho prático, actividades de exploração e de investigação bem como trabalho colaborativo.

O papel curricular do conceito de funções no programa do Ensino Secundário é visto tendo em conta os aspectos algébricos ou funcionais da sua abordagem. As formas de estudo da álgebra elementar priorizadas são: as expressões designatórias, as equações, a noção da função bem como a sua representação gráfica.

O conceito de função, como identidade própria, aparece no tronco comum (1º ciclo) no programa oficial do Ministério da Educação e Ensino Superior. Neste ciclo são propostos as noções de variável; função; forma de sua representação; resolução de equações lineares e proporcionalidade directa e inversa. No 2º ciclo estuda-se a análise gráfica de funções; função quadrática; função definida por ramos nos quais destaca-se a função modular. No 3º ciclo abordam-se o limite de funções; a continuidade e a aplicação do cálculo diferencial no estudo completo de funções racional e irracional; funções exponencial e logarítmica.

Consideramos pertinente propor o estudo de Funções com aplicação do Maple VIII por ser considerado um dos conteúdos mais importantes em Matemática e por este vir a ajudar os alunos uma vez que no Mundo actual, embora não nos apercebamos disso, dependemos essencialmente da Matemática. Por exemplo, ao lermos um jornal ou uma revista, diariamente nos deparamos com gráficos, tabelas e ilustrações. Estes são instrumentos muito utilizados nos meios de comunicação. Um texto com ilustrações, é muito mais interessante, chamativo, agradável e de fácil compreensão.

Ao relacionarmos o espaço em função do tempo, o número do sapato em função do tamanho dos pés, percebemos quão importantes são os conceitos de funções para compreendermos as relações entre os fenómenos físicos, biológicos e sociais. Observamos então que as aplicações de relações e funções estão presentes no nosso quotidiano de tal forma, que não podemos, não devemos e, certamente, não queremos nos distanciar dela.

Com o surgimento das NTIC, as funções mais rotineiras da nossa vida têm sido realizadas por computadores: desde uma conta, até o controle do nosso dinheiro no banco, o nosso pagamento de salário, e muitas outras actividades são controladas por máquinas que são por sua vez, apoiadas na Matemática. Sendo o papel da Matemática não o de formar novos Matemáticos mas sim de ajudar a formar cidadãos. Neste sentido é desejável que o trabalho do aluno seja o de pensar, investigar, experimentar e não somente o de ouvir e copiar.

A utilização da tecnologia e as aplicações da Matemática a par de uma visão do aluno que pensa, experimenta e investiga em vez de ser "receptor de conteúdos" devem continuar a ser uma preocupação central no processo de ensino. Podemos mesmo dizer que "a forma de aprender a fazer Matemática é um conteúdo do ensino da Matemática.

Aqui, apresenta-se uma nova forma de abordar o ensino de funções no ensino secundário e algumas actividades que podem ser adequadas a um leque variado de alunos, tendo sempre em conta que para estes estudantes, o essencial da aprendizagem deve ser ensinado e aprendido no contexto das ideias e da resolução de problemas interessantes, enfim em situações que exijam o seu manejo e em que seja vantajoso o seu conhecimento, privilegiando mesmo características típicas do ensino experimental.

1.2. Justificação da abordagem do tema

As funções sempre ocuparam um espaço muito importante no programa de Matemática do Ensino Secundário e continuam a ter uma carga horária significativa nos programas do 1º, 2º e 3º ciclos reformado.

Com as unidades de geometria no tronco comum abrem-se novas perspectivas para uma abordagem renovadora de funções. Já não basta uma abordagem que prioriza os aspectos algébricos em detrimento dos aspectos geométricos. Estão lançados os requisitos necessários á uma abordagem de funções, dando uma grande importância aos aspectos geométricos evitando, em contrapartida, o excesso de cálculos que por vez se torna fastidioso para os alunos.

Nós, os professores de Matemática, somos responsáveis pela organização das experiências de aprendizagem dos alunos, pois estamos num lugar chave para influenciar as suas concepções.

Hoje em dia vemos a sociedade caminhar para uma nova era, o das TIC que estão sendo determinantes nesta mudança: são os ambientes informatizados que ampliam cada vez mais as nossas capacidades intelectuais, as calculadoras gráficas, os softwares educativos, as redes de comunicação etc, e os ambientes escolares naturalmente tem de acompanhar estas mudanças. È neste contexto que escolhemos o tema, o estudo de funções utilizando o software Maple VIII, pelos motivos seguintes:

- Por este ser considerado um dos conteúdos mais importantes em Matemática;
- Dar o nosso possível contributo para o melhoramento do processo de ensino aprendizagem;
- Poder ganhar experiências no trabalho de softwares aplicativos no estudo de funções;
- Poder facultar aos professores um material de apoio facultativo;
- Mostrar a importância das Novas Tecnologias de Informação no ensino da Matemática;
- Facilitar o processo ensino aprendizagem ganhando mais tempo para as aulas práticas;
- Acompanhar o desenvolvimento das Novas Tecnologias e o seu possível aproveitamento.
- Contribuir para o desenvolvimento de competências a nível do domínio e de manejamento das ferramentas de cálculo;
- Desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção do real;

1.3 Questão de investigação

Tendo em conta o contexto e a justificação do tema acima apresentados, eis a questão de orientação que desenvolveu o trabalho de pesquisa:

Como motivar os alunos para que haja aprendizagem de Funções utilizando o software Matemático Maple VIII?

O presente trabalho pretende responder a questão acima e contempla os seguintes objectivos:

- Melhorar a qualidade do ensino da Matemática;
- Enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem dos alunos;
- Diminuir a memorização dos conteúdos;
- Tirar o melhor benefício das Tecnologias de Informação;
- Rentabilizar o tempo e mais prática na sala de aula;
- Aumentar o envolvimento e participação dos alunos nas actividades;

Finalidades do trabalho:

- Analisar os dois métodos de estudar funções:
- Comparar os mesmos;
- Avaliar o impacto da utilização do software.

1.4 Opções Metodológicas

No presente trabalho, a principal metodologia de investigação é qualitativa através da **análise documental** tendo como suporte básico a exploração do software Matemático confrontando à realidade tradicional do Ensino da Matemática com a Moderna. Tendo em conta que estamos a ser invadidos com as Novas Tecnologias, propomos algumas soluções que de alguma forma podem trazer inovações para as nossas escolas Secundárias.

O plano de trabalho inclui as seguintes fases metodológicas:
→ Revisão da bibliografia para se construir uma problemática e fundamentar as análises, que consiste na recolha e análise dos manuais adoptados no 12ºano, sobretudo o da autora Maria Augusta Ferreira Neves, uma vez que é uma indicação do Ministério da Educação e Ensino Superior e outros que se achar pertinente bem como o Programa Oficial do Ministério da Educação e Ensino Superior que permitirão o enquadramento do tema em estudo.

→ Pesquisas na Internet. Foram realizadas várias pesquisas na Internet para se abordar a questão das NTIC, o papel do Professor face as TIC no ensino da Matemática e ainda sobre a importância de software, bem como a sua escolha.

- Exploração do software Matemático Maple VIII. Aqui, far-se-á a exploração do software bem como o seu funcionamento, suas potencialidades e de seguida um estudo comparativo de funções abordadas no método tradicional e a moderna através de exemplos extraídas de vários manuais de 12ºano de escolaridade.

1.5 Estruturação do Trabalho

Estruturou-se o presente trabalho em cinco capítulos que serão especificamente analisados como:

O Capitulo I é dedicado ao contexto de estudo, ao equacionamento da questão de investigação, aos principais motivos da escolha do tema bem como os seus objectivos e finalidades.

O Capitulo II, o enquadramento teórico, em que se faz uma análise da evolução histórica do conceito de Funções através da revisão da literatura, sobre o seu surgimento, o conceito, a sua forma de representação bem como a abordagem tradicional através de exemplos de estudo de funções.

O Capitulo III, dedicado às NTIC que coloca a tónica no novo papel do Professor face as TIC bem como da importância e escolha do software matemático educativo.
Aborda ainda os Sistemas de Computação algébrica ou simbólica e numérica, as suas definições exemplos, os principais comandos, o seu funcionamento e as suas potencialidades.

O Capitulo IV, enfatiza as funções estudadas no capítulo II, as suas aplicações no Maple VIII, bem como as suas análises, comparação e propostas de alguns exercícios.

O Capitulo V e último integra as conclusões e recomendações que sintetizam os resultados mais importantes do presente trabalho, focando algumas considerações sobre as limitações e implicações sobre futuros trabalhos.

Capítulo II - Noção de Função

2 . Breve historial do conceito de função.

O Conceito de Função evoluiu ao longo dos séculos o que revolucionou a Matemática. Desde a Grécia antiga até a idade moderna, a teoria dominante era a geometria euclidiana que tinha como elementos base: o ponto, a recta e o plano.

A noção de função não é muito antiga à introdução do método analítico e como objecto de estudo só aconteceu nos finais do século XVII.

A sua origem confunde-se com os primórdios infinitesimal que surgiu de uma forma confusa nas fluentes e fluxões de **Newton** (1642-1727). Este autor aproximou o conceito de funções com a utilização dos termos "*relatia quantias*"para designar variável dependente e "*genita*" para designar uma quantidade obtida a partir de outras por intermédio das quatros operações aritméticas fundamentais. Foi **Leibniz** (1646-1716) quem primeiro usou o termo função em1673, para designar a dependência de uma curva de quantidade geométrica como as sub tangentes e sub normais. Introduziu igualmente as terminologias de constante, variável e parâmetro. **Jonh Bernoulle** (1667-1748) publicou um artigo que viria a ter grande divulgação, contendo a definição de função de certa variável como quantidade que é composta de qualquer forma dessa variável e constante. **Euler** substitui o termo "quantidade " por expressão analítica e introduziu a notação f (x) para uma função. Usou a letra **e** para representar a base do sistema de logaritmos naturais**. Dirichlet** (1805-1859), estabeleceu as condições suficientes para representabilidade duma função, separou o conceito da sua representação analítica formulando em termos de correspondências entre duas variáveis tal que a todo o valor da variável independente se associa um e um só valor da variável dependente. Com o desenvolvimento da teoria de conjunto iniciada por **Cantor** a noção de função foi estendida de forma a incluir tudo o que fosse correspondências arbitrárias entre quaisquer conjuntos, numéricos ou não.

2.1 **Conceito de Função**

O estudo dos vários fenómenos da natureza e a forma técnica de os resolver leva-nos a considerar a variação de uma grandeza em correlação com a variação de uma outra grandeza. Por exemplo a área do círculo em função do raio, que é dada pela fórmula $A = \pi R^2$, isto é, quando o raio R toma valores diferentes, a área A tomará também valores diferentes.

Existem múltiplas definições sobre o conceito de Funções, mas vamos abordar duas definições do ponto de vista de dois autores diferentes.

Definição1 – y é uma função de x e escrevemos $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$, etc.., se a cada valor da variável x pertencendo a um certo domínio, corresponde um valor da variável y.

Diz que x é a variável independente. A dependência entre as variáveis x e y chama-se dependência funcional. A letra f que entra na dependência funcional $y = f(x)$ indica que é necessário aplicar certas operações a x para obter o valor correspondente a y**.** (Piskounov, 1993).

Definição 2 – Função ou aplicação f é uma correspondência entre um conjunto A e um conjunto B se a cada elemento x do primeiro conjunto corresponde um e um só elemento $f(x)$ do segundo conjunto**.** (Maria Augusta & Maria Luísa 1993).

Representa-se por:

$$f : A \to B$$
$$x \to f(x) = y$$

x é o objecto; $f(x) =$ y é a imagem
A variável y depende da variável x:
y é a variável dependente;
x é a variável independente.

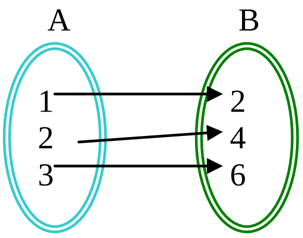
2.2 Formas de representar uma função

2.2.1. Funções dadas com ajuda de tabelas

Neste processo dispõem-se numa certa ordem os valores da variável independente $x_1, x_2 ... x_n$ e os valores correspondentes da função $y_1, y_2 ... y_n$.
Consideremos um exemplo: o custo da Internet (C.I) em função do tempo gasto T (em horas)

T	1	2	3	4	5
C.I	100$	200$	300$	400$	500$

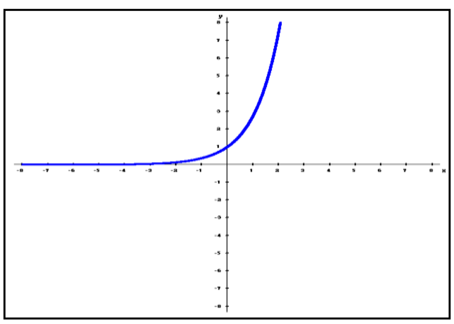
2.2.2. Funções representadas através de diagramas



2.2.3. Funções representadas através de gráfico

Consideremos no plano um sistema de coordenadas rectangulares um conjunto de pontos
$M(x, y)$, tal que nenhum par de pontos se encontre sobre uma recta paralela ao eixo oy, define uma certa função unívoca $y = f(x)$. Os valores da variável independente são as abcissas destes pontos, os valores da função são as ordenadas correspondentes (Piskounov, 1993).

$y = e^x$



O conjunto dos pontos do plano (xoy) cujas abcissas são os valores da variável independente e as ordenadas as valores correspondentes da função chama-se gráfico da função.

2.2.4. Funções representadas por expressões analíticas

Expressão analítica é a notação simbólica do conjunto das operações matemáticas conhecidas que se deve aplicar numa certa ordem aos números e ás que exprimem grandezas constantes ou variáveis.

Exemplo de expressões analíticas: $x^2 - 4$; $\dfrac{\log x}{5x^2 - 1}$; $e^x + x^3$; $5^x + \sqrt{2+4x}$, etc.

Se a dependência funcional $y = f(x)$ é tal que f é uma expressão analítica, dizemos que a função y de x é dada analiticamente (Piskounov, 1993).

Exemplo: $y = x^4 + 5$; $y = \dfrac{x+3}{x-1}$; $y = \sqrt{x^2 - 1}$; $y = \log x^2$; $y = e^x$

2.3. Exemplos de Estudo de Funções Utilizando o Método Tradicional

Na maioria das vezes as maiores dificuldades centram-se no estudo do comportamento de uma função, e a melhor forma de observar esse comportamento é obter o gráfico da respectiva função.

O avanço das NTIC que dispomos hoje, ajuda-nos bastante, mas para isso é preciso conhecer e dominar os mesmos de forma consciente e ter uma postura crítica, saber interpretar os resultados obtidos pela mesma, uma vez que as vezes torna-se necessário esclarecer o comportamento de uma função num ponto e quantificar com rigor. Neste caso, os métodos analíticos são indispensáveis.

Quando se fala no estudo completo de funções e representação gráfica de funções fala-se em determinar:

- O domínio da função;
- O contradomínio da função;
- Pontos de intersecção com os eixos;
- Simetria do gráfico;
- Continuidade;
- Diferenciabilidade;
- Monotonia e os extremos;
- Concavidade e pontos de inflexão;
- Assimptotas do gráfico;
- Construção do gráfico.

1. $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{3x-1}$

- **Domínio da Função**

$Df=\left\{x\in\Re : 3x-1\neq 0\right\}$

$Df=\Re\setminus\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

- **Intersecção com os eixos**
  - **Eixo dos** xx

$f(x)=0\Leftrightarrow \dfrac{x^2-2x+3}{3x-1}=0\Leftrightarrow x^2-2x+3=0\wedge 3x-1\neq 0$

A função não intersecta o eixo dos xx

  - **Eixo dos** yy

$f(0)\Leftrightarrow \dfrac{0^2-2(0)+3}{3(0)-1}=-3$

A função intersecta o eixo dos yy no ponto $(0,-3)$

- **Simetria**

$f(-x)=\dfrac{(-x)^2-2(-x)+3}{3(-x)-1}=\dfrac{x^2+2x+3}{-3x-1}$

A função não é par e nem impar, portanto o gráfico de f não é simétrico relativamente ao eixo dos yy e nem à origem.

- **Continuidade**

A função é contínua em todo o seu domínio por ser o quociente entre duas funções contínuas.

- **Diferenciabilidade**

A função é diferenciável em todo o seu domínio por ser o quociente entre duas funções diferenciáveis.

❖ Extremos e Monotonia

1ª Derivada

$$f'(x)=\left(\frac{x^2-2x+3}{3x-1}\right)'=\frac{\left(x^2-2x+3\right)'\times(3x-1)-\left(x^2-2x+3\right)\times(3x-1)'}{(3x-1)^2}=\frac{3x^2-2x-7}{(3x-1)^{\wedge 2}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-2x-7=0\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{88}}{6}\Leftrightarrow x_1=\frac{2+\sqrt{88}}{6}\vee x_2=\frac{2-\sqrt{88}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{22}}{3}\vee x_2=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{22}}{3}$$

$$f'(x)>0\ se\ x\in\left]-\infty,\frac{1-\sqrt{22}}{3}\right[\cup\left]\frac{1+\sqrt{22}}{3},+\infty\right[\ f\ crescente$$

$$f'(x)<0\ se\ x\in\left]\frac{1-\sqrt{22}}{3},\frac{1}{3}\right[\cup\left]\frac{1}{3},\frac{1+\sqrt{22}}{3}\right[\ f\ decrescente$$

Tabela de sinal de 1.ª derivada

x	- ∞	$\frac{1-\sqrt{22}}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1+\sqrt{22}}{3}$	$+\infty$
$3x^2-2x-7$	+	0	-	-	-	**0**	+
$(3x-1)^2$	+	+	+	**0**	+	+	+
$f'(x)$	+	**0**	-	**Ind.**	-	**0**	+
$f(x)$	□	**Max.**	□		□	**Min.**	□

❖ Concavidade e Pontos de Inflexão

2ª Derivada

$$f''(x)=\left(\frac{3x^2-2x-7}{(3x-1)^2}\right)''=\frac{\left(3x^2-2x-7\right)'\times\left((3x-1)^2\right)-\left(3x^2-2x-7\right)\times\left((3x-1)^2\right)'}{(3x-1)^4}$$

$$=\frac{(3x-1)\left[(6x-2)(3x-1)-\left(3x^2-2x-7\right)6\right]}{(3x-1)^3}=\frac{(6x-2)(3x-1)-\left(3x^2-2x-7\right)6}{(3x-1)^3}=\frac{44}{(3x-1)^3}$$

Não há pontos de inflexão, pois a segunda derivada nunca se anula.

Tabela de sinal de 2.ª derivada

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	**0**	+
$f(x)$	$\cap$	**Ind.**	$\cup$

$$f''(x) > 0, se\ x > \frac{1}{3} \quad concavidade\ \ voltada\ \ para\ \ cima$$

$$f''(x) < 0, se\ x < \frac{1}{3} \quad concavidade\ \ voltada\ \ para\ \ baixo$$

❖ Assimptotas

Verticais

- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x\to\frac{1}{3}^+} \frac{x^2-2x+3}{3x-1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)+3}{3\left(\frac{1}{3}\right)-1} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) = \lim\limits_{x\to x\to\frac{1}{3}^-} \frac{x^2-2x+3}{3x-1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{3}\right)+3}{3\left(\frac{1}{3}\right)-1} = -\infty$

$x = \frac{1}{3}$ é uma assimptota vertical

Horizontais

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2-2x+3}{3x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{3x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2}{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x}{3} = -\infty$

Não existem assimptotas horizontais, pois $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Oblíqua

Se existir será da forma $y = mx + b$
Cálculo:

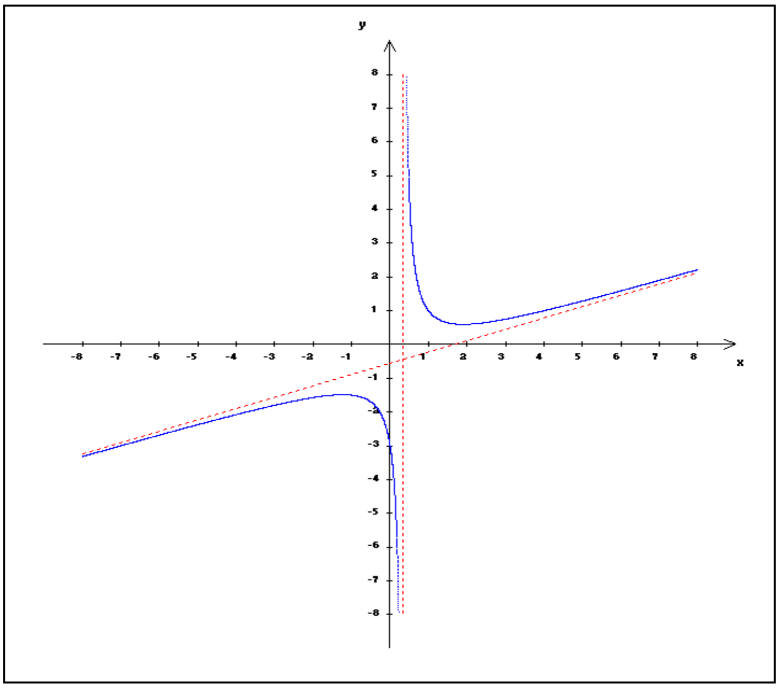
$$m=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\left(\dfrac{x^2-2x+3}{3x-1}\right)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-2x+3}{3x^2-x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{3x^2}=\frac{1}{3}$$

$$=b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-2x+3}{3x-1}-\frac{1}{3}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2-6x+9-3x^2+x}{9x-3}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x+9}{9x-3}=$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-5x}{9x}=\frac{-5}{9}$$

Então $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$ é assimptota oblíqua

- Gráfico



- $D'f=\Re$

Função 2.

$g(x)=x+\sqrt{|x^2-1|}$

$$x+\sqrt{|x^2-1|}=\begin{cases}x+\sqrt{x^2-1}\ se\ x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\\ x+\sqrt{-x^2+1}\ se\ x\in\left]-1,1\right[\end{cases}$$

- Domínio

$Dg=\Re$

❖ Intersecção com os eixos

➢ Eixo dos xx

$g(x)=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{|x^2-1|}=0 \Leftrightarrow \sqrt{|x^2-1|}=-x \Leftrightarrow \left(\sqrt{|x^2-1|}\right)^2=\left(-x^2\right) \quad \wedge -x\geq 0 \Leftrightarrow |x^2-1|=x^2 \Leftrightarrow x^2-1=x^2 \vee -x^2+1=x^2 \Leftrightarrow$

$x^2=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

$c.s=-\sqrt{\frac{1}{2}}$

Intersecta o eixo dos xx no ponto $A(-\frac{1}{\sqrt{2}},0)$

➢ Eixo dos yy

$g(0)=x+\sqrt{-x^2+1}=0+\sqrt{0+1}=1$

Intersecta o eixo dos yy no ponto $p(0,1)$

❖ Simetria

$g(-x)=-x+\sqrt{|x^2-1|}=-x+\sqrt{|x^2-1|}$

Não há simetria, logo a função não é simétrica em relação ao eixos dos yy e nem relativamente à origem.

❖ Continuidade

A função é continua em todo o seu domínio como sendo a soma de duas funções continuas, excepto talvez nos pontos -1 e 1.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} g_1(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+\sqrt{-x^2+1}=1$
- $\lim\limits_{x\to 1^-} g_1(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x+\sqrt{-x^2+1}=1$
- $\lim\limits_{x\to -1^+} g_2(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x+\sqrt{-x^2+1}=-1$
- $\lim\limits_{x\to -1^-} g_2(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} x+\sqrt{x^2-1}=-1$
- $g_1(1)=1 \quad e \quad g_2(-1)=-1$

Como $\lim\limits_{x\to 1^\pm} g_1(x)=g(1) \quad e \ \lim\limits_{x\to -1^\pm} g_2(x)=g(-1)$ então a função $g(x)$ é contínua nos pontos 1 e -1.

❖ Diferenciabilidade

A função é diferenciável em todo o seu domínio pelo facto de ser a soma de duas funções diferenciáveis, excepto talvez nos pontos 1 e -1.

No ponto 1

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x^2-1}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{(x-1)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)=1+\sqrt{\frac{1+1}{1-1}}=+\infty$$

A função não é diferenciável no ponto 1.

No ponto -1

$$\lim_{x\to -1}\frac{g(x)-g(-1)}{x+1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+\sqrt{x^2-1}+1}{x+1}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x+1}\right)=\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{\frac{x^2-1}{(x+1)^2}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(1+\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right)=1+\sqrt{\frac{1+1}{1-1}}=+\infty$$

A função não é diferenciável no ponto -1.

- **Monotonia e extremos**

1ª Derivada

$$g'(x)=\begin{cases}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)'=1+\dfrac{\left(x^2+1\right)'}{2\sqrt{x^2-1}}=1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}} & se\ x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[\\[2ex] \left(x+\sqrt{-x^2+1}\right)=1+\dfrac{\left(-x^2+1\right)'}{2\sqrt{-x^2+1}}=1-\dfrac{x}{\sqrt{-x^2+1}}=\dfrac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}} & se\ x\in\left]-1,1\right[\end{cases}$$

$$g'(x)=0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}+x\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{x^2-1}\geq -x$$

- $se -x<0\Leftrightarrow x>0\ e\ x\in\left]-\infty,-1\right]\cup\left[1,+\infty\right[$

  $g'(x)>0\Rightarrow x\in\left]1,+\infty\right[$
- $se\ x\in\left]-\infty,-1\right[\Leftrightarrow x^2-1\geq x^2\Leftrightarrow -1>0\ p.f$

  $g'(x)<0\Rightarrow x\in\left]-\infty,-1\right[$

$se\ x\in\left]-1,1\right[$ a derivada tem o sinal do numerador.

$g'(x)\geq 0\Leftrightarrow\sqrt{-x^2+1}\geq x$

- $se\ x\leq 0\ e\ x\in\left]-1,1\right[\Rightarrow x\in\left]-1,0\right[$

- $se\ x \in \left]0,1\right[\Rightarrow -x^2+1 \geq x^2 \Leftrightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right] \cap \left]0,1\right[\Rightarrow x \in \left]0, \sqrt{\frac{1}{2}}\right] g'(x) \geq 0$

  Logo $g'(x) < 0 se\ x \in \left]\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right[$

Tabela de sinais da 1.ª derivada

x	$-\infty$		**-1**		$-\sqrt{\frac{1}{2}}$		$\sqrt{\frac{1}{2}}$		1	$+\infty$
$g'(x)$	**-**		**-**		**0**	**+**	**0**	**-**	**+**	**+**
$g(x)$	□		□		**0**	□	**0**	□	□	□
			-1		**Min.**		**Max.**		**1**	

A função é crescente de: $\left]-1, \sqrt{\frac{1}{2}}\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

A função é decrescente de $\left]-\infty, -1\right[\cup \left]\sqrt{\frac{1}{2}}, 1\right[$

❖ **Concavidade e pontos de inflexão**

2ª Derivada

$$g''(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \left(\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}+x}{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}\right)' = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{2}}(2x)+1\right]\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(x^2-1\right)^{\frac{-1}{2}}.2x\left(\left(x^2-1\right)+x\right)}{x^2-1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2-1} - x^2.\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{\left(\sqrt{x^2-1}\right)\left(x^2-1\right)}\ se\, x \in \left]-\infty,-1\right] \cup \left[1,+\infty\right[$$

$$g''(x) = \left(\frac{\sqrt{-x^2+1}-x}{\sqrt{-x^2+1}}\right)' = \left(\frac{\left(-x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}-x}{\left(-x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}\right)' = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(-x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}(-2x)-1\right]\left(-x^2+1\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\left(-x^2+1\right)^{\frac{-1}{2}}.(-2x)\left[\left(-x^2+1-x\right)\right]}{-x^2+1}$$

$$= \frac{-\sqrt{-x^2+1} - x^2.\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}}{-x^2+1} = \frac{-1}{\left(\sqrt{-x^2+1}\right)\left(-x^2+1\right)}\ se\ x \in \left]-1,1\right[$$

Tabela de sinais da 2.ª derivada

x	$-\infty$	-1		**1**	$+\infty$
$g''(x)$	**-**	**0**	**-**	**0**	**-**
$g(x)$	$\cap$	**0**	$\cap$	**0**	$\cup$

Concavidade voltada para cima de**:** $\left]-\infty,-1\right[\cup\left]1,+\infty\right[$

Concavidade voltada para baixo de: $\left]-1,1\right[$

Os pontos: (-1,-1) e (1,1) são pontos de inflexão

- **Assimptotas**

Verticais

- $\lim\limits_{x\to1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to1^+} x+\sqrt{x^2-1}=1$
- $\lim\limits_{x\to1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to1^-} x+\sqrt{-x^2+1}=1$
- $\lim\limits_{x\to-1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^+} x+\sqrt{-x^2+1}=-1$
- $\lim\limits_{x\to-1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to-1^-} x+\sqrt{x^2-1}=-1$

Não existe assimptota vertical, pois $\lim\limits_{x\to1^\pm} g(x)=1 \quad e \quad \lim\limits_{x\to-1^\pm} g(x)=-1$

Horizontal

$\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sqrt{x^2-1}(ind)$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x\ \right)^2-\left(\sqrt{x^2-1}\right)^2}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}=0$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sqrt{x^2-1}=+\infty$

$y=0$ é assimptota horizontal, pois $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=0$

Obliqua

Se existir será da forma: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x^2}} \right) = 2$$

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{(x)^2 - \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2}{x\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2 - x\sqrt{x^2 - 1}} = 0$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} \left(g(x) - mx \right)$$

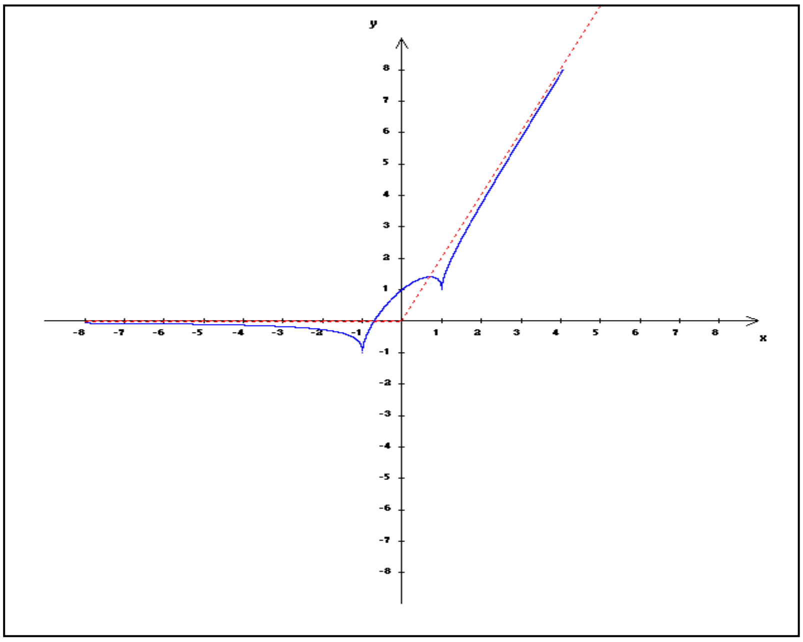
$$\lim_{x \to +\infty} \left(g(x) - mx \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2 - 1} - 2x \right) = \lim_{x \to +\infty} \left(-x + \sqrt{x^2 - 1} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(-x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right)}{\left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)^2 - \left(\sqrt{x^2 - 1}\right)^2}{\left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(-x - \sqrt{x^2 - 1}\right)} = 0$$

$y = 2x$ é assimptota obliqua

$$\lim_{x \to -\infty} \left(g(x) - mx \right) = \lim_{x \to -\infty} x + \sqrt{x^2 - 1} = -\infty$$

Gráfico



- $D'g = [-1, +\infty[$

3. $h(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

- **Domínio**

$Dh = \Re$

- **Intersecção com os eixos**
  - Eixo dos xx

$h(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = -2$

Intersecta no ponto $P(-2, 0)$

  - Eixo dos yy

$h(0) \Leftrightarrow \dfrac{0+2}{\sqrt{0^2+1}} = 2$

Intersecta no ponto $Q(0, 2)$

- **Simetria**

$h(-x) = \dfrac{-x+2}{\sqrt{x^2+1}}$ A função não é par nem impar. O gráfico da função não é simétrico relativamente ao eixo dos yy e nem é simétrico relativamente à origem.

- **Continuidade**

A função é contínua em todo o seu domínio como sendo o quociente de duas funções contínuas.

- **Diferenciabilidade**

A função é diferenciável em todo o seu domínio como sendo o quociente entre duas funções diferenciáveis.

- **Monotonia e Extremos**

1ª Derivada

$$h'(x)=\left(\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}\right)'=\frac{(x+2)'\times\left(\sqrt{x^2+1}\right)-(x+2)\times\left(\sqrt{x^2+1}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=\frac{\sqrt{x^2+1}-(x+2)\times\frac{x}{x^2+1}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$=\frac{-2x+1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$h'(x)=0\Leftrightarrow -2x+1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$h(\frac{1}{2})=\frac{\frac{1}{2}+2}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1}}=\sqrt{5}$$

Tabela de sinais da 1.ª derivada

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	**0**	**-**
$h(x)$	$\nearrow$	$\sqrt{5}$ **Max.**	$\searrow$

A função é crescente de**:** $\left]-\infty,\frac{1}{2}\right[$

A função é decrescente de: $\left]\frac{1}{2},+\infty\right[$

- ❖ **Concavidade e pontos de inflexão**

2ª Derivada

$$h''(x)=\left(\frac{-2x+1}{\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}}\right)'=\frac{-2\left(x^2+1\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}(2x)(-2x+1)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left[-2\left(x^2+1\right)-\frac{3}{2}\left(-4x^2+2x\right)\right]}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(-2x^2-2+6x^2-3x\right)}{\left(x^2+1\right)^3}=\frac{\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{2}}\left(4x^2-3x-2\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$$

$$h''(x)=0\Leftrightarrow 4x^2-3x-2=0\Leftrightarrow x_1=\frac{3+\sqrt{41}}{8}\vee x_2=\frac{3-\sqrt{41}}{8}$$

$$h''(x)>0 \text{ } se \text{ } x\in\left]-\infty,\frac{3-\sqrt{41}}{8}\right[\cup\left]\frac{3+\sqrt{41}}{8},+\infty\right[$$

$$h''(x)<0 \text{ } se \text{ } x\in\left]\frac{3-\sqrt{41}}{8},\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right[$$

Tabela de sinais da 2.ª derivada

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{41}}{8}$		$\frac{3+\sqrt{41}}{8}$	$+\infty$
$h'(x)$	+	**0**	-	**0**	+
$h(x)$	$\cup$	**0**	$\cap$	**0**	$\cup$

Pontos de inflexão:

$$\left\langle \begin{array}{l} p_1\left(\frac{3-\sqrt{41}}{8}, h\left(\frac{3-\sqrt{41}}{8}\right)\right) \\ p_2\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}, h\left(\frac{3+\sqrt{41}}{8}\right)\right) \end{array}\right.$$

❖ Assimptotas

- **Verticais –** não existem, visto ser $Dh = \Re$

- **Horizontais**

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{x}+\frac{2}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x}{|x|}+\frac{2}{|x|}}{\sqrt{1+\frac{1}{|x|^2}}} = -1$$

$y = 1$ e $y = -1$é assimptota horizontal.

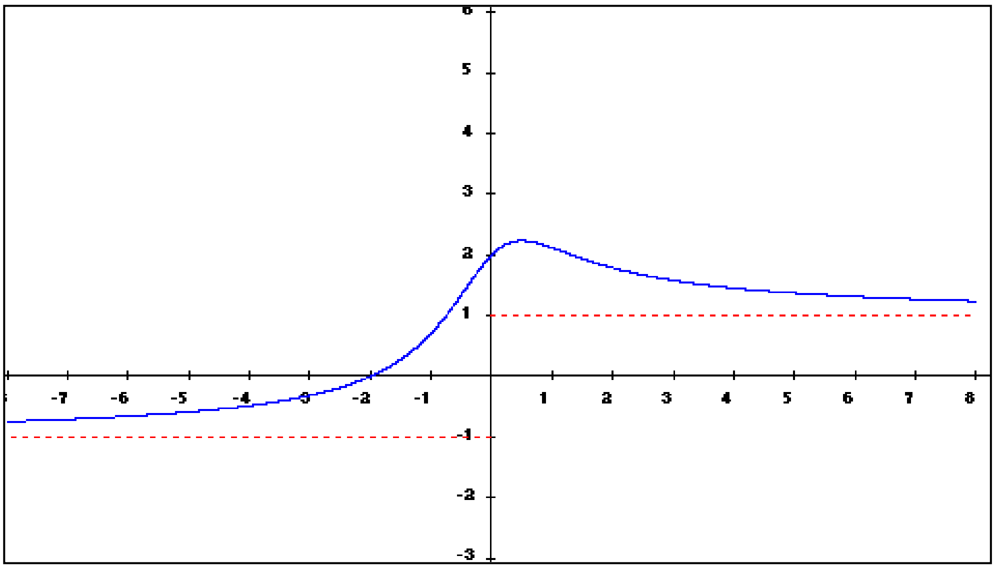
- **Obliqua**

Se existir será da forma: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x+2}{\sqrt{x^4+1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x^4} = 0$$

Não existe assimptota oblíqua

❖ **Gráfico**



❖ **Contradomínio**

$D'h = \left]-1, \sqrt{5}\right]$

4. $m(x) = \log\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right|$

❖ **Domínio** $Dm = \Re \setminus \{-2, 3\}$`

❖ **Intersecção com os eixos**

➢ **Eixo dos** xx

$$\log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = 0 \Leftrightarrow \left|\frac{x+2}{3-x}\right| = 1$$

$$\frac{x+2}{3-x} = 1 \vee \frac{-x+2}{-3+x} = -1$$

$$\Leftrightarrow x+2 = 3-x \vee -x+2 = 3-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Intersecta no ponto $Q = (\frac{1}{2}, 0)$

- **Eixo dos** yy

$\log\left|\frac{0+2}{3-0}\right| = \log\frac{2}{3}$

Intersecta no ponto $P = (0, \log\frac{2}{3})$

- **Simetria**

$m(-x) = \log\left|\frac{-x+2}{3+x}\right|$ Não há simetria, pois o gráfico não é simétrico em relação ao eixo dos yy e nem à origem.

- **Continuidade**

A função é contínua em todo o seu domínio.

- **Diferenciabilidade**

A função é diferenciável em todo o seu domínio.

- **Monotonia e extremos**

1ª Derivada

$$\log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = \left[\log(x+2) - \log(3-x)\right]' = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3-x}$$

$m'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} + \frac{1}{3-x} = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 6 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2 \vee x_2 = 3$

$m'(x) = 0 \ se \ x = -2 \vee x = 3$

$m'(x) > 0 \ se \ x \in \left]-2, 3\right[- crescente$

$m'(x) < 0 \ se \ x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]3, +\infty\right[- decrescente$

Tabela de Sinais da 1.ª derivada

x	$-\infty$	-2		3	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+	0	-
$g(x)$	□	Ind.	□	Ind.	□

Não há máximos e nem mínimos.

- **Concavidade e pontos de Inflexão**

2ª Derivada

$$m''(x) = \left(\frac{5}{-x^2+x+6}\right)' = \frac{10x-5}{\left(-x^2+x+6\right)^2}$$

$$m''(x) = 0 \Leftrightarrow 10x - 5 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Tabela de Sinais da 2.ª derivada

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$m''(x)$	-	0	+
$m(x)$	$\cap$	P.I $(\frac{1}{2}, 0)$	$\cup$

Concavidade voltada para cima de: $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

Concavidade voltada para baixo de: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

- **Assimptotas**

  - **Verticais**

$$\lim_{x\to -2^+} m(x) = \lim_{x\to -2^+} \log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = -\infty$$

$$\lim_{x\to -2^-} m(x) = \lim_{x\to -2^-} \log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = -\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} m(x) = \lim_{x\to 3^+} \log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = +\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-} m(x) = \lim_{x\to 3^-} \log\left|\frac{x+2}{3-x}\right| = +\infty$$

Como $\lim_{x\to -2^\pm} m(x) = -\infty \; e \lim_{x\to 3^\pm} m(x) = +\infty$ então $x = -2 \; e \; x = 3$ é assimptota vertical

- **Horizontal**

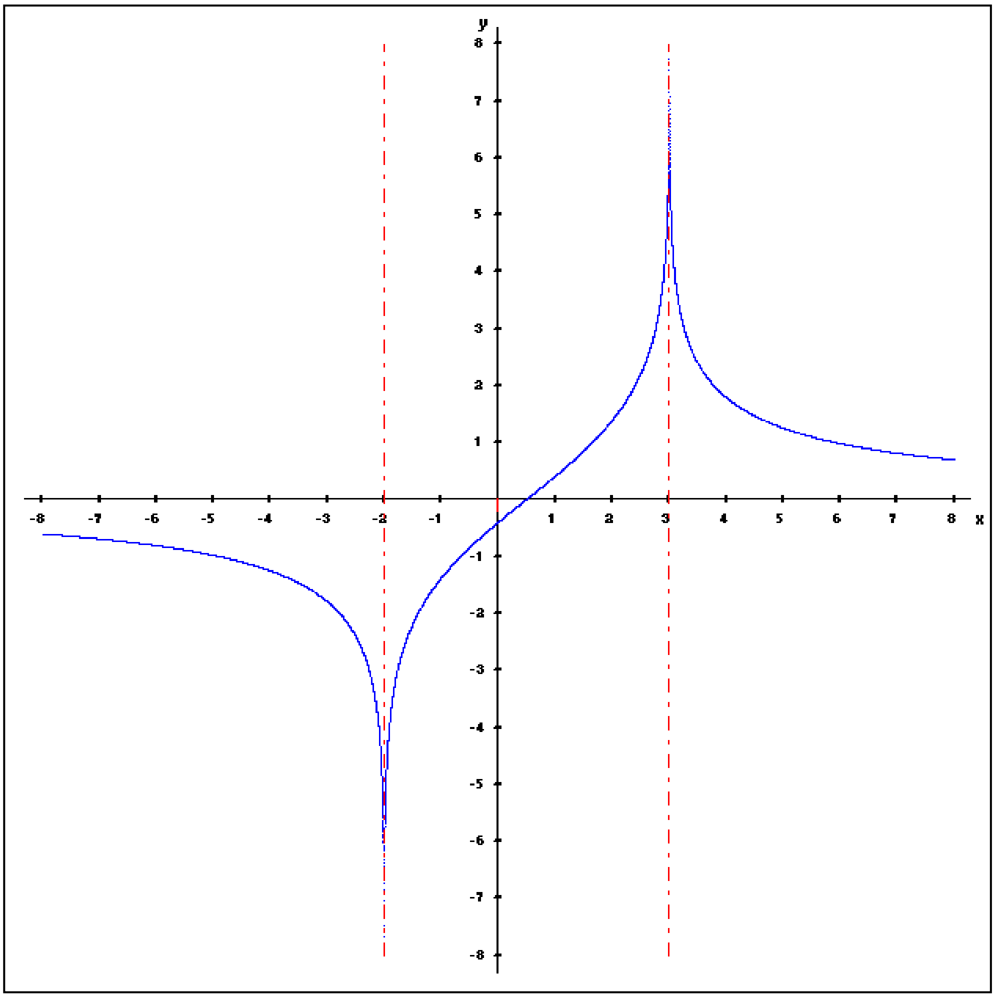
$$\lim_{x \to \pm\infty} m(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \log \left| \frac{x+2}{3-x} \right| = 0$$

$y = 0$ é assimptota Horizontal

- **Oblíqua**

Não existe assímptota oblíqua

❖ **Gráfico**



5. $i(x) = x.e^x$

❖ **Domínio** $Di = \Re$

❖ **Intersecção com os eixos** `

➢ **Eixo dos** xx

$x.e^{x}=0 \Leftrightarrow x=0$

A função intersecta o gráfico no ponto (0,0)

➢ **Eixo dos** yy

$i(0)=0.e^{0}=0$

A função intersecta o gráfico no ponto (0,0)

❖ **Simetria**

$i(-x)=-x.e^{-x}$ A função não é par e nem impar. O gráfico da função não é simétrico relativamente ao eixo dos yy e nem é simétrico relativamente á origem.

❖ **Continuidade**

A função é contínua em todo o seu domínio como sendo o produto de duas funções contínuas.

❖ **Diferenciabilidade**

A função é diferenciável em todo o seu domínio como sendo o produto entre duas funções diferenciáveis.

❖ **Monotonia e Extremos**

$i'(x)=\left(xe^{x}\right)'=\left(x\right)'.e^{x}+x.\left(e^{x}\right)'=e^{x}+xe^{x}=e^{x}\left(1+x\right)$

$i'(x)=0\ se\, 1+x=0 \Leftrightarrow x=-1$

x	$-\infty$	**-1**	$+\infty$
$i'(x)$	**-**	**0**	**+**
$i(x)$	□	**Min.**	□

$i(-1)=-e^{-1}=-\dfrac{1}{e}$

A função é crescente de: $\left]-1,+\infty\right[$

A função é decrescente de: $\left]-\infty,-1\right[$

❖ **Concavidade e pontos de inflexão**
2ª Derivada

$i''(x)=\left(e^{x}\left(1+x\right)\right)'=\left(e^{x}\right)'.\left(1+x\right)+\left(e^{x}\right)\left(1+x\right)'=e^{x}\left(2+x\right)$

$i''(0) = x + 2 = -2$

Tabela de sinais da 2ª derivada

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$i''(x)$	-	0	+
$i(x)$	$\cap$	P.I	$\cup$

$$i(-2) = -2e^{-2} = -\frac{2}{e^2}$$

Ponto de inflexão (-2, $-\frac{2}{e^2}$)

❖ **Assimptotas**

- **Verticais**

Não existe assimptota vertical, visto ser o domínio $\Re$

- **Horizontal**

$$\lim_{x \to +\infty} i(x) = \lim_{x \to +\infty} xe^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} i(x) = \lim_{x \to -\infty} xe^x = 0$$

$y = 0$ é assimptota horizontal

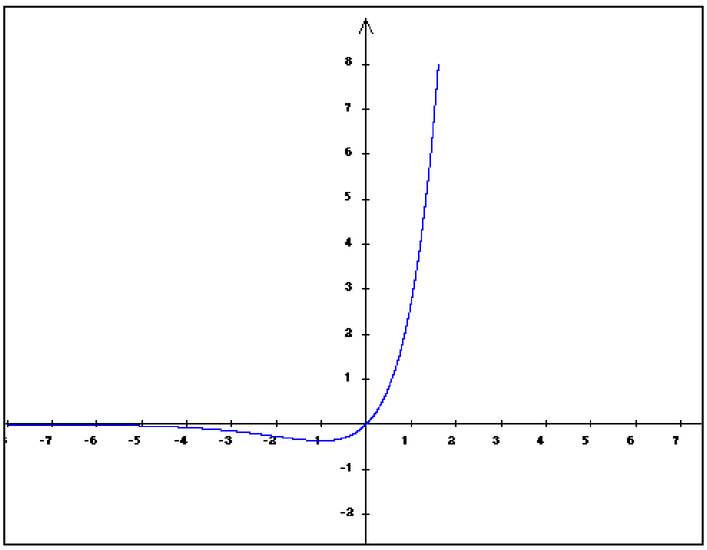
- **Oblíqua**

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{xe^x}{x} = +\infty$$

$$m = \lim_{x \to -\infty} \frac{i(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{xe^x}{x} = 0$$

Não existe assímptota oblíqua

❖ **Gráfico**



❖ $D'i = \left] -\frac{1}{e}, +\infty \right]$

3. Novas Tecnologias de Informação no Ensino da Matemática

3.1 A Matemática e as Novas Tecnologias

"A Matemática contribui, de forma positiva, para a formação educacional global de todos os cidadãos, interrogando, descobrindo, argumentando, raciocinando sobre objectos abstractos e relacionando-os com a realidade física e social" (João Pedro, 1986).

As NTIC têm vindo a invadir o nosso mundo e a nossa educação. Somos, de certa forma, obrigados a lidar com as novas tecnologias, pois estas representam o nosso futuro e nos facilitam no nosso dia-a-dia.

A introdução de Novas Tecnologias como instrumento de apoio ao ensino da Matemática é cada vez mais urgente. A nível do secundário procede-se a uma progressiva reforma introduzindo as calculadoras gráficas como um importante elemento de resolução de problemas. Além disso, os sistemas de computação algébrica (CAS) como o MAPLE, tornam obsoletos os processos tradicionais de manipulação de expressões algébricas baseados em papel e lápis. Deste modo, e numa sociedade em que os computadores estão presentes em todos os domínios do conhecimento e do ensino, como instrumentos preciosos de trabalho, a Matemática não pode continuar a ignorar essa realidade.

3.2 O papel do professor face as Novas Tecnologias de Informação (N.T.I)

A introdução bem sucedida das Novas Tecnologias de informação na sala de aula exige uma compreensão do professor, do porquê e do como da sua utilização e familiarização pessoal com esta tecnologia para que haja confiança nas suas capacidades nesta área.

São vários os indicadores que apontam para a necessidade de um investimento mais forte e continuado na formação inicial dos professores no que tange as NTIC. Hoje, os professores são confrontados com uma grande variedade de softwares educativos tais como as calculadoras gráficas, a Internet, o Word Wide Web, etc; Tudo isso facilita no desenvolvimento de uma actividade bastante produtiva e estimulando o sentido da organização de ideias e a capacidade de expressão.

Mas, Para muitos professores continuam a ser um corpo estranho, que provoca incómodo. Temos de deixar de lado esta percepção e tentar acompanhar o desenvolvimento tirando o melhor proveito.

Um bom domínio das NTIC é essencial para garantir o acesso ao emprego, ao desenvolvimento pessoal e o exercício da cidadania. Esses objectivos colocam desafios ao professor, aos alunos e às instituições.

As NTIC são para o professor uma presença incontornável. Contudo, a sua integração nas actividades lectivas está longe de ser algo simples. De facto, embora seja reconhecido que a procura de informação na Internet pode fomentar nos jovens "a exploração, análise, síntese e integração" (José Manuel, Hélia oliveira & João Pedro, 1998), ela não garante só por si mais e melhor aprendizagem: o papel do professor é fundamental. No entanto, esse papel muda, substancialmente, na medida em que o professor deixa de ser a única (ou primária) fonte de saber na aula.

Com o desenvolvimento das NTI surge uma nova postura do ser professor:

→Gerir e adoptar o currículo às características e necessidades dos alunos;

→ Utilizar materiais diversificados e estimular os alunos a consultar fontes diversas;

→ Propor tarefas diversificadas;

→ Cooperar de modo efectivo na produção de materiais, diagnóstico de problemas, na realização de projectos educativos;

→ Tirar partido das tecnologias e não pegar somente no quadro e no giz;

→ Criar tarefas, problemas e questões que desafiem e apoiem o aluno.

→ Transformar a sala de aula numa verdadeira comunidade de aprendizagem e não monopolizar o discurso.

→ Orientar as aprendizagens em contextos em que, pela natureza do recurso em causa, não é possível exercer um controlo elevado.

→ O professor deve ajudar os alunos a desenvolver capacidades que lhes permitam navegar e orientá-los neste "labirinto virtual" sem que perca de vista aquilo que procuram. Neste aspecto é fundamental que o professor se preocupe com alguns aspectos tais como: o que procurar e seleccionar, como procurar e para quê procurar, uma vez que temos várias fontes de informações e nem todos são credíveis, logo os alunos precisam desenvolver um espírito crítico e inquisitivo, para que possam distinguir as que são mais relevantes (Miguéns, 1998).

→ Partilhar conhecimento – Antigamente o professor era visto como um detentor de todo o conhecimento e o único lugar onde se devia aprender era na escola. Os alunos eram considerados como uma "tábua rasa", mas actualmente as coisas são vistas de outra forma, o professor não é o " sabe tudo"pois há uma troca de ideias e o aluno pode aprender sem o professor e não necessariamente numa sala de aula. O aluno dispõe de materiais diversificados, alguns são muito inteligentes, com espírito crítico, querem saber o porquê das coisas. E ainda existem pais que acompanham passo a passo o seu educando, ajudando e controlando muitas vezes o próprio professor.

Com essa revolução, todo o professor vê-se obrigado a acompanhar o desenvolvimento

No campo do conhecimento de forma a proporcionar cada vez mais um ensino de qualidade e com sucessos.

Segundo Miguéns (1998) face à complexidade da actual Sociedade da Informação existem, outras competências que começam a ser exigidas aos professores e aconselha ainda que todos os professores de Matemática saibam enfrentar os novos desafios e que os mesmos exigem profissionais reflexivos, investigadores, criativos, participantes, intervenientes e críticos. Acrescenta ainda, que um professor tem de ser disponível para aprender ao longo da vida, porque a formação do professor deve ser encarada numa perspectiva de desenvolvimento profissional, constituindo a formação inicial apenas o princípio de todo o processo e proporcionar uma antevisão do Mundo da prática profissional, promovendo o contacto com a realidade escolar. Deste modo, é importante que a estes seja dada a oportunidade de conhecer experiências e projectos realizados nas escolas e programas oficiais no âmbito da utilização das TIC.

Um dos aspectos mais inovadores da Internet, como meio de comunicação e informação, é permitir que os seus utilizadores assumam um duplo papel de consumidores e produtores de informação. A interactividade cria "um novo modelo de comunicação, com cidadãos activos e intervenientes, que interagem directamente com a fonte de informação e que são eles próprios fontes de informação. Esta característica constitui, sem dúvida, um factor de grande motivação para os alunos e com enormes potencialidades em termos educativos. Por um lado, porque estimula um conjunto importante de aprendizagens pessoais, por outro, porque é um meio de promover o contacto entre alunos que se encontram em diferentes lugares geográficos, e muitas vezes, longínquos (Miguéns, 1998).

A preocupação principal das escolas deverá ser a de formar professores que saibam utilizar essa tecnologia de maneira reflectida e adaptada à sua disciplina e aos níveis que irão seleccionar. Assim, identificam-se como principais competências necessárias ao professor, neste domínio:

→ O conhecimento de implicações sociais e éticas das TIC;

→ A capacidade de uso de *software* utilitário;

→ A capacidade de uso e avaliação de *software* educativo;

→ A capacidade de uso de TIC em situações de ensino e aprendizagem. (Ponte &Serrazina, 1998 p.12).

3.3 Passos para a Selecção de um Software

No que tange aos softwares há que saber escolher o mais adequado, uma vez que existe uma grande quantidade deles no mercado classificados como educativo mas nem sempre cumprem o que traz na caixa do software.

Um bom software é aquele que estimula a criatividade e a construção do conhecimento.

Os softwares educativos não podem causar medo e insegurança nos alunos e nem "pensar pelos alunos". Não é o adequado neste sentido, há que saber escolher os softwares com algumas qualidades.

Cabe aos alunos, mais do que assimilar o saber constituído, investigar situações, resolver problemas por si próprios formulados e mesmo inventar condições e notações.

Neste sentido há que ter em conta sobretudo a sua configuração mínima e os equipamentos necessários á navegação (mouse, kit multimédia, o teclado …).

No sentido de apoiar os professores na árdua tarefa de selecção de software a usar em ambiente de formação, tem-se impulsionado à criação de inúmeros instrumentos (alguns deles propostos pelas próprias empresas produtoras de software), habitualmente na forma de listas de verificação ou de grelhas, ditos de 'avaliação' (Ponte, 2003).

Para avaliar um software temos de ter em conta alguns parâmetros técnicos e estéticos; não obstante a sua extensão, não permitem evidenciar diferenças significativas entre software, nomeadamente porque propõem a atribuição do mesmo peso (quantitativo) a todos os parâmetros, independentemente dos objectivos que se perseguem e não distinguem os processos de 'revisão', 'selecção' e 'avaliação', com todas as vantagens que daí advém (Edulink S.D).

Segundo Edulink (S.D) em conversa com alguns Mestres da área da pedagogia em Informática, neste caso a professora **Gilda Campos** realça que para avaliar os softwares é preciso ter em conta a configuração mínima exigida, equipamentos necessários para executar a navegação tais como: o rato, teclado, kit multimída isto porque existem muitos softwares que causam medo e insegurança ao aluno o que contradiz o nome de software educativo. Não convêm que tenha peças anti pedagógicas, tem de funcionar como um estímulo à criatividade e a construção do conhecimento.

Segundo a autora a avaliação do software educativo se divide em nove parâmetros:

1. Alterabilidade
2. Amenidade ao uso
3. Independência do ambiente
4. Eficiência do processamento
5. Clareza
6. Correcção
7. Rentabilidade
8. Robustez
9. Validabilidade

Em cada um dos parâmetros existem vários aspectos a ter em conta. Mas também nunca deixar de lado a opinião do aluno na avaliação de qualquer software, uma vez que ele o melhor indicador quando se trata de apontar o que mais lhe desperta interesse.

É preciso que os professores trabalhem em conjunto, lado a lado com o especialista técnico no desenvolvimento do software e atendendo às actualizações educacionais.

Para que a introdução das NTI seja bem sucedida na sala de aula exige-se, não só a compreensão do professor, do porquê, do como da sua utilização mas também a familiarização pessoal com essa tecnologia.

Para que o professor ganhe confiança nas suas capacidades nesta área, torna-se necessário ter oportunidade de trabalho individual e em grupo, estendido ao longo de um período de tempo considerável. Só assim é possível que venha a confrontar-se com as dificuldades e, também, a experimentar os sucessos. Isto é tanto mais importante na medida em que muitos professores sentem-se totalmente ultrapassados pelos seus alunos, que evidenciam uma bagagem de conhecimentos e um à vontade que os deixa verdadeiramente intimidados.

Capítulo III – Sistemas de Computação Algébrica ou Simbólica e Numérica

3.1 Considerações gerais

O Mundo está em constante transformação em todos os campos do saber. A cada dia surgem novas tecnologias o que contribui para um aumento significativo de informações. Tudo isso exige quer dos alunos quer dos professores que estejam cada vez mais preparados para obterem o sucesso profissional. Para tal é necessário uma formação cultural ampla para que possamos adaptar-nos tecnologicamente as necessidades, com iniciativas criativas e predisposição para o trabalho em equipa.

Hoje em dia o computador é um instrumento muito usado e de aplicação prática nos mais diversos ramos da ciência. Por isso, surgem cada vez mais programas de computadores, cada vez mais sofisticados, que ajudam a solucionar problemas dos mais simples aos mais complexos. Os softwares de computação algébrica e simbólica, tais como: DERIVE, MACSMA, MAPLE VIII, MATHCAD, MATLAB são exemplos deste tipo de programa.

Os Sistemas de Computação Algébrica (SAC) permitem não só executar um grande número de algoritmos, como manipular simbolicamente conceitos matemáticos.

Computação Simbólica e Computação Numérica são duas grandes categorias de computação científica. Em Computação numérica o computador é usado para realizar cálculos somente com números. Por outro lado os Sistemas de Computação Algébrica (SCS) são capazes de efectuar cálculos, com expressões matemáticos e símbolos. Os SCS dão ênfase a exactidão dos cálculos, enquanto sistemas numéricos operam com números que são correctos até onde a precisão do computador permite.

Ainda que os sistemas numéricos sejam extremamente eficientes e precisos, resolvem uma grande variedade de problemas. A computação numérica não pode prescindir de prévia análise algébrica. Actualmente, os SCS, oferecem a possibilidade dessa análise ser automatizada.

Entre os softwares, escolhemos trabalhar com o Maple VIII. Serão apresentados alguns elementos deste programa e, sua aplicação e comparação em conteúdos de Estudo de Funções.

3.2. Características dos SCS

Os SCS efectuam com exactidão cálculos com números inteiros, números racionais e expressões simbólicas. São providos de algoritmos para manipulação de polinómios, funções racionais e outras expressões envolvendo funções trigonométricas ou hiperbólicas e varias outras funções transcendentes. Diferenciação, facturação, expansão em fracções parciais, solução de sistemas de equações (lineares ou não), a integração, a expansão em série de Taylor e operações com matrizes são operações dadas como simples comandos.

Geralmente, os SCS permitem ao usuário precisão arbitrária, isto é, o número de dígitos mantidos depois do ponto pode ser seleccionado pelo usuário a qualquer momento da computação.

Os SCS têm a capacidade de gerar código FORTRAM (ou C), que possibilita a interacção entre computação simbólica e numérica.

O sistema é construído de tal forma que novos módulos programados pelo usuário podem ser facilmente adicionados ao núcleo do mesmo aumentando assim a capacidade do SCS de resolver problemas.

3.2.1 MAPLE 8

3.2.1.1 – Definição e Descrição

Maple VIII é um sistema poderoso e eficiente para computação Matemática, muito versátil onde se pode explorar cálculos numéricos e simbólicos, gráfico e programação.
Pode ser utilizado como um ambiente interactivo na forma de um livro digital inteligente, proporcionando um melhor aproveitamento dos alunos, capacitando-os para interpretar os fenonémos físicos de uma forma mais completa e abrangente.

O Maple VIII foi desenvolvido pela Universidade de Waterloo, Canadá, província de Ontário desde 1980, para uso profissional na resolução de problemas que exigem métodos matemáticos.

O nome Maple VIII, indica que o software se encontra na oitava versão, mas actualmente já foram lançados 25 edições deste software.

O poder de Maple VIII, se estende para além dos programas numéricos, pela sua capacidade de trabalhar símbolos e números. A extensividade da rotina simbólica do Maple VIII é alcançada através de uma rotina numérica e gráfica, que estão todos integrados num usuário de fácil acesso e interactivo.

Em outras palavras Maple VIII pode ser para álgebra e cálculos, assim como as calculadoras são para os números.

A eficiência do Maple VIII não é apenas por ser mais rápido do que os outros produtos comparativos, mas também por solucionar problemas que envolvem definições formais da Matemática e retomar respostas como objectos matemáticos.

O Maple VIII suporta precisão aritmética arbitrária. Ele é capaz de armazenar e usar números com mais de 500000 dígitos, possui ainda uma extensa biblioteca de conteúdos matemáticos (Viviana, 2005).

Descrição do Software Maple VIII

Características técnicas

Designação ________ Maple (MAthematical **PLE**sure)

Editor ____________ Waterloo Maple inc

Versão ____________ VIII

Data _____________2002

Língua ___________Inglesa

Requisitos _________ PC pentium II com 64 Megabyte de RAM ou superior Macintosh com System Software 6 ou Superior.

3.2.1.2 Funcionalidades

Os SCA utilizam no seu funcionamento métodos algébricos, normalmente são constituídos por quatro subsistemas utilizador-computador.

⇨ **O núcleo** (kernel)

É constituído por um conjunto de funções predefinidas que permitem a realização de cálculos e avaliação de expressões, a manipulação das estruturas de dados e dos aspectos ligados à entrada / saída de informação (imput /output), etc.

⇨**A linguagem de programação**

Alem de permitir a resolução de problemas matemáticos, ajusta ou aumenta a potencialidade do núcleo. Normalmente, não é uma linguagem compilada, o seu processamento é feito através de um interpretador.

⇨ A **biblioteca**

É um conjunto de aplicações que contem rotinas para facilitar a resolução de vários problemas matemáticos usando métodos de álgebra linear, estatística e outros.

⇨**A interface**

Abrange o sistema de ajuda (help) e controla o processo global de comunicação com o utilizador.

3.2.1.3 Unidade de ajuda no Maple

O Maple VIII possui uma unidade de ajuda on-line compreensível onde são encontradas todas as explicações necessárias sobre a finalidade e a forma de utilização dos seus comandos. Da mesma forma, são apresentados diversos exemplos de utilização de tais comandos, permitindo que o usuário visualize o efeito da inclusão de cada parâmetro em um determinado comando.

Se a qualquer momento, na continuação da sessão, for necessário mais informações sobre um comando, por exemplo o chamado **functioname,** e a ajuda está disponível ao escrever**?**

Functioname. Assim, ao introduzir “**?”**e o comando, imediatamente aparece a página correspondente do help.

Para aceder o help, tecle F1 no ambiente do Maple VIII ou vá ate ao menu Help na barra de menus e seleccione a opção contents.

Pode-se também pesquisar o help directamente sobre um comando específico. Para tanto, escreva o comando sobre o qual você deseja informar-se, coloque o cursor entre duas letras quaisquer da palavra digitada e, a seguir, pressione F1.Se o comando existir, o Maple VIII abrirá a página de ajuda especificada.

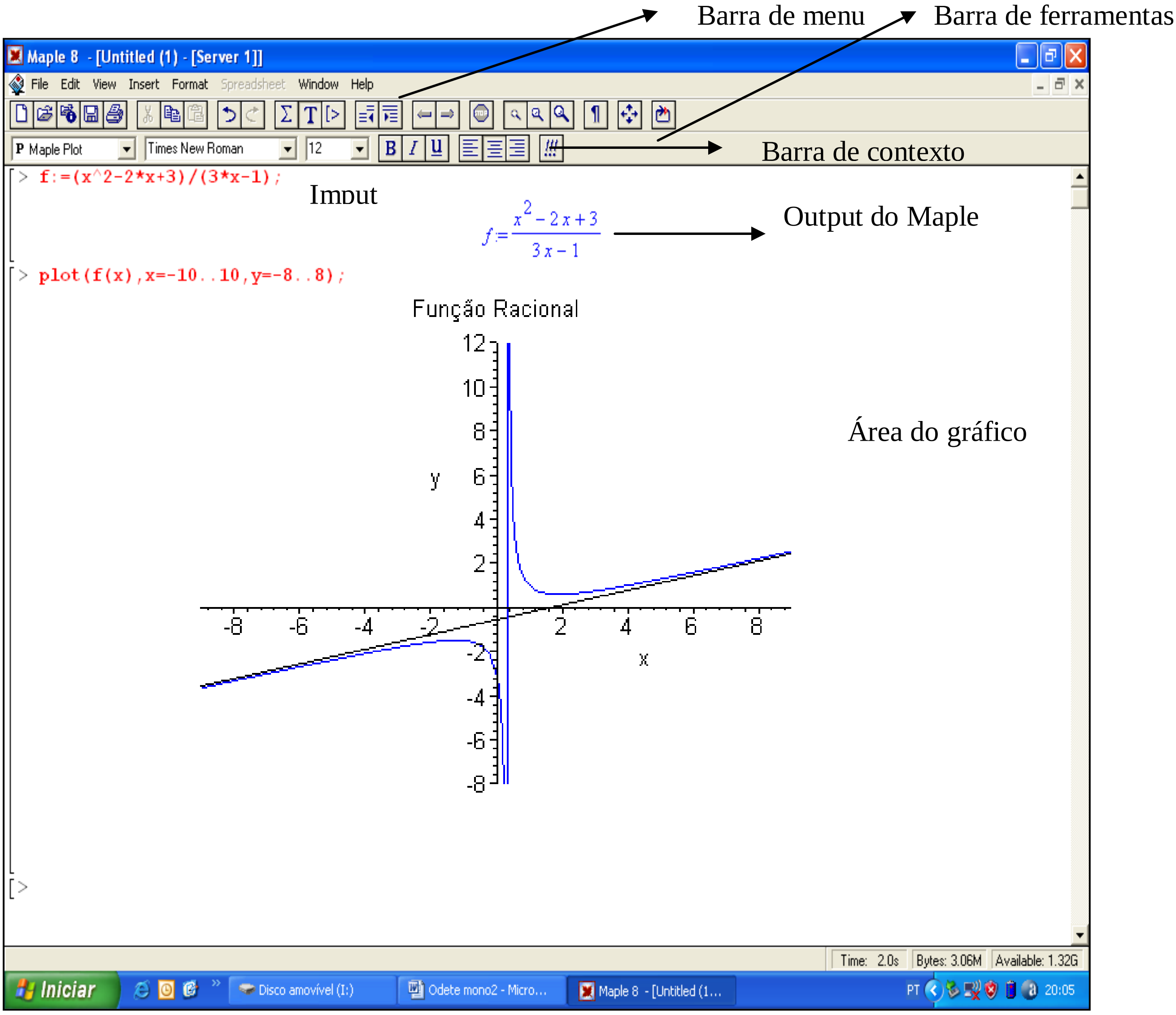
No total, são mais de três mil páginas disponíveis para fornecer ajuda e esclarecimento sobre a utilização do software (corless, 2001).

3.2.1.4 Facilidades oferecidas pelo programa

O Maple VIII oferece algumas facilidades simbólicas, numéricas e gráficas. Entre as quais podemos citar:

- Gráficos de funções bi - gráficos de funções múltiplas, semiLog, Log e LogLog, paramétricos, polares , de fase, de contorno, curvas implícitas etc.
- Tridimensionais – múltiplas funções, superfície destacada, funções de cores definidas, pelo usuário, de funções implícitas, contornos e polígonos, anotações textuais, variedade de sistemas de coordenadas: cónico, esférico, entre outros.
- Animação gráfica – controle interactivo de animação, playback, controle de velocidade, direcção e voltas;
- Álgebra linear: operações matriciais, matizes especiais, coordenadas curvilíneos;
- Funções elementares e especiais: trigonometria, exponencial, logaritmo, Bessel, Zeta, Gamma, Hiper geometria, etc.
- Integração indefinida e definida de funções racionais, elementares, algébricos e especiais;
- Resolução de equações: sistemas lineares e não lineares, equações diferenciais ordinárias e parciais, relações de recorrência, soluções numéricas, simbólicas e em série, inequações.

3.2.1.5 O ambiente de trabalho do Maple VIII



- No Maple VIII, as linhas devem começar com um pront de imput;

- A sessão Maple VIII é normalmente iniciado por um comando ou clicado no ícone de aplicação Maple VIII nas plataformas tais como Macintosh e Windows. Quando iniciar a sessão, o pront de imput aparece>.

- Todo o comando do Maple deve terminar por um ponto e virgula (;), para obter uma resposta tecla-se ENTER. O resultado é apresentado centrado na folha de trabalho, em itálico e a cor azul.

- Alternativamente, os comandos podem terminar por dois pontos (:). Neste caso, o Maple VIII calculará o resultado do comando, mas não o imprimirá na tela guardando na memória;
- No Maple os comentários ou esclarecimento, para serem feitos, devem ser precedidos de #.
- A não colocação do ponto e virgula ou dos dois pontos indica que a linha do comando não foi terminada e que o comando continuará na linha seguinte;
- O Maple trabalha com um sistema multilinha, isto é, vários comandos podem ser colocados em varias linhas, desde que agrupado com uma única chaveta;
- O símbolo (%) substitui o último valor calculado que está na memória do Maple.
- A multiplicação e divisão são efectuados antes da adição e subtracção, e potenciação antes da multiplicação.

3.2.1.6 Principais operações Aritméticas e Funções Trigonométricas

Operação ou Função/ Simbolo no Maple	Teste
Adição:+	2+3;
Subtração:-	8-3;
Multiplicação:*	5*4;
Divisão:/	10/2;
Potenciação(2 formas):^ ou **	2**3; 2^3;
Valor absoluto : abs	abs(-7);
Factorial:!	4!;
Raiz quadrada :sqrt	sqrt(12);
Constante principais: π :Pi Infinito: -Infinito : Raiz quadrada de -1:	 Pi; evalf(Pi); ∞; -∞; sqrt (-1);
Funções Trigonometricas	
Seno:sin	sin(0);
Cosseno	cos(Pi);
Tangente	tan(Pi/4);
Cotangente	cot(Pi/2);
Logaritmos	evalf(ln(2)); evalf(log10(100);
Exponencial	evalf(exp(8));
Secante	sec(-1);
seno hiperbolico	sinh(Pi/2);

Principais Comandos e as suas Funcionalidades

- **<u>Evalf-</u>** resolve a expressão na forma decimal e avalia em ponto flutuante. Em certos casos,quando o comando "solve" não consegue reslover,é utilizado o comando "evalf".

  A sintaxe é:evalf(expr,n)   expr- expressão matemática

  n – opcional,é um número inteiro que especifica o número de digitos.

Exemplo: > `evalf(Pi);`

$$3.141592654$$

> `evalf (Pi, 10);`

$$3.141592654$$

> `evalf (Pi, 20);`

$$3.1415926535897932385$$

- **<u>Value-</u>** encontra-se na biblioteca student e serve para calcular o valor da expressão"inertes"ou seja, expressões que representam operadores matemáticos e que não são automaticamente avaliados pelo Maple VIII.

  A sintaxe é: value (f)   f- é uma expressão algébrica qualquer.

  Somente os comandos Int, Sum, Diff, e Produt são reconhecidos pela função value.

  Exemplo:

> `F := Int(x, x);`

$$F := \int x \, dx$$

> `value(F);`

$$\frac{1}{2} x^2$$

- **<u>Simplify-</u> serve para simplificar qualquer tipo de expressão.**

  A sintaxe é: simplify(expr,n1,n2...)
  expr- é uma expressão qualquer
  n1,n2,...- (opcional) o tipo de simplificação desejada

Exemplo: > `(5*x^2/(1+x)^3+(5-x)^2);`

$$\frac{5\,x^2}{(x+1)^3}+(5-x)^2$$

> `Simplify (5*x^2/ (1+x) ^3+ (5-x) ^2);`

$$\frac{51\,x^2-2\,x^3+65\,x+25-7\,x^4+x^5}{(x+1)^3}$$

- **Root of**-serve para representar todas as raizes da equação.

Sintaxe é :Rootof(expr,x)
x- nome de uma variável.
Exemplo:
> `RootOf(x^2+1=0);`

$$\mathrm{RootOf}(\_Z^2+1)$$

- **Solve-**serve para resolver equações , inequações ou sistemas de equações.

A sintaxe é : solve(eqn,var)
eqn- equação ou inequação   var – (opcional) um nome de variável.
Exemplo: `solve(x^2+4*x-3,{x});`

$$\{x=-2+\sqrt{7}\},\ \{x=-2-\sqrt{7}\}$$

- **fsolve**- este comando resolve as equções que não podem ser reslolvidas com o comando” solve. “

A sintaxe é:fsolve(eqns,vars,options)
eqns- uma equação ou um comjunto de equações
vars- (opcional) uma variável ou um comjunto de variáveis
options- (opcional) paramêtros para controlar a solução

Exemplo: > > `fsolve( tan(sin(x))=1, x );`

0.9033391108

```
> poly := 23*x^5 + 105*x^4 - 10*x^2 + 17*x:
fsolve( poly, x, -1..1 );
```

-0.6371813185, 0.

- **Unapply -** transforma uma expressão algébrica numa função.

A sintaxe é: Unapply (expr, x, y,..)

expr- uma expressão

x,y- nome de variáveis

Exemplo:

```
> p := x^2 + sin(x) + 1;
```

$$p := x^2 + \sin(x) + 1$$

```
> f := unapply(p,x);
```

$$f := x \to x^2 + \sin(x) + 1$$

```
> f(Pi/6);
```

$$\frac{1}{36}\pi^2 + \frac{3}{2}$$

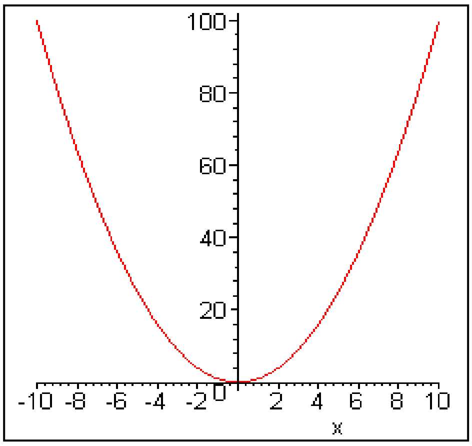
- **<u>Plot</u>**- serve para criar gráficos de funções reais de uma variável real.

A sintaxe é : plot(f, x=a..b,y=c..d,<options>)

f- função real, a e b representam os limites do domínio, c e d representam os limites do contra domínio. Opções podem ser : stilo , sinbolo,titúlo,cor;etc.

$$f := x \to x^2$$

```
> Plot (f(x), x=-10..10);
```



- **<u>Diff</u>**- calcula derivadas ordinárias ou parciais de funções.Possui duas formas diff ou Diff

Diff – apresenta o símbolo da derivada sem calculá-la e para calcular usa se a função evalf.
diff – disponível no pacote student
A sintaxe é : diff(expr,x1,x2....xn)
Diff(expr,x1,x2....xn)
expr- uma expressão
x1,x2.....xn- variavéis

Exemplos:

```
> diff(x^2, x);
```

$$2\,x$$

```
> diff (sin(x), x);
```

$$\cos(x)$$

```
> Diff (sin(x), x);
```

$$\frac{d}{dx}\sin(x)$$

- **<u>Subs-</u>** substitui um valor numérico na expressão algébrica.

A sintaxe é : subs(x=a , expr)

Exemplo: `> -2*x^2-4*x+10;`

$$-2\,x^2-4\,x+10$$

```
> Subs(x=1, %);
```

$$4$$

- **<u>Limit</u>** – calcula o valor do limite da função. Existem dois tipos Limite e limite.

A expresão é:limit(f(x),x=l)
l é um numero real ou +infinito ou -infinito,o maple calcula o limite bilateral quando não é apresentada nenhuma opção e quando o limite existe.

Limites laterais
A direita: limit(f(x),x=l,right)
A esquerda:limit(f(x),x=l,left)
Exemplos `> f:=x->(sqrt(x-1))/(x-1);`

$$f := x \to \frac{\sqrt{x-1}}{x-1}$$

```
> Limit (f(x), x=1) =limit(f(x), x=1);
```

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \mathit{undefined}$$

```
> Limit (f(x), x=1, left) =limit (f(x), x=1, left);
```

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = -\infty\,I$$

```
> Limit (f(x), x=1, right) =limit (f(x), x=1, right);
```

$$\lim_{x\to 1+}\frac{1}{\sqrt{x-1}} = \infty$$

Capítulo IV – APLICAÇÃO DO SOFTWARE MATEMÁTICO MAPLE VIII NAS FUNÇÕES ESTUDADAS NO PONTO 2.3 do Capítulo II

1. Estude a função $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{3x-1}$

```
> f:=x->(x^2-2*x+3)/(3*x-1);
```

$$f := x \to \frac{x^2-2\,x+3}{3\,x-1}$$

- **Dominio:** $\Re \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$

- **Intersecção como eixo dos xx**

```
> solve(x^2-2*x+3);
```

$$1+\sqrt{2}\,I,\ 1-\sqrt{2}\,I$$

```
> solve(f(x));
```

$$1+\sqrt{2}\,I,\ 1-\sqrt{2}\,I$$

- **Intersecção com eixo dos yy**

```
> subs(x=0,f(x));
```

$$-3$$

- **Assimptotas vertical**

```
> limit (f(x),x=1/3,left);
```

$$-\infty$$

```
> limit(f(x),x=1/3,right);
```
$$\infty$$

Portanto $x=\frac{1}{3}$ é uma Assimptotas vertical.

```
> av:=1/3;
```
$$av := \frac{1}{3}$$

- **Assimptota Horizontal**

```
> limit(f(x),x=-infinity);
```
$$-\infty$$

```
> limit(f(x),x=infinity);
```
$$\infty$$

Não existem Assimptotas horizontais, pois $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$

- **Assimptota oblíua**

```
> m:=x->(f(x)/x);
```
$$m := x \to \frac{f(x)}{x}$$

```
> m1:=limit(m(x),x=infinity);
```
$$m1 := \frac{1}{3}$$

```
> m2:=limit(m(x),x=-infinity);
```
$$m2 := \frac{1}{3}$$

```
> b:=limit(f(x)-m1*x,x=infinity);
```
$$b := \frac{-5}{9}$$

```
> b:=limit(f(x)-m1*x,x=-infinity);
```
$$b := \frac{-5}{9}$$

Portanto $y=\frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$ é uma Assimptotas oblíqua

```
> ff:x->(1/3)*x-(5/9);
```
$$x \to \frac{1}{3}x-\frac{5}{9}$$

- **Derivada – Monotonia e extremos**

```
> diff(f(x),x);
```
$$\frac{2x-2}{3x-1}-\frac{3(x^2-2x+3)}{(3x-1)^2}$$

```
> f1:=simplify(%);
```

$$f1 := \frac{3\,x^2 - 2\,x - 7}{(3\,x - 1)^2}$$

```
> solve(f1=0);
```

$$\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3},\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}$$

```
> solve(f1>0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty,\ \mathrm{Open}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}\right)\right),\ \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3}\right),\ \infty\right)$$

Portanto a função é crescente em: $\left]-\infty, \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3}, +\infty\right[$

```
> solve(f1<0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}\right),\ \mathrm{Open}\left(\frac{1}{3}\right)\right),\ \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{3}\right),\ \mathrm{Open}\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3}\right)\right)$$

Portanto a função é decrescente em: $\left]\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{22}}{3}, \frac{1}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{\sqrt{22}}{3},\right[$

A função tem um máximo e um mínimo.

Máximo: $f(\frac{1-\sqrt{22}}{3})$

Mínimo: $f(\frac{1+\sqrt{22}}{3})$

- **Segunda derivada Concavidade e pontos de inflexão**

```
> diff(f(x),x,x);
```

$$\frac{2}{3\,x - 1} - \frac{6\,(2\,x - 2)}{(3\,x - 1)^2} + \frac{18\,(x^2 - 2\,x + 3)}{(3\,x - 1)^3}$$

```
> f2:=simplify(%);
```

$$f2 := \frac{44}{(3\,x - 1)^3}$$

> solve(f2=0);# O numerador nunca se anula, logo a função f_2 não tem zeros.

```
> solve(f2>0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{3}\right),\ \infty\right)$$

Para $x > \frac{1}{3}$ - concavidade voltada para cima

```
> solve(f2<0);
```

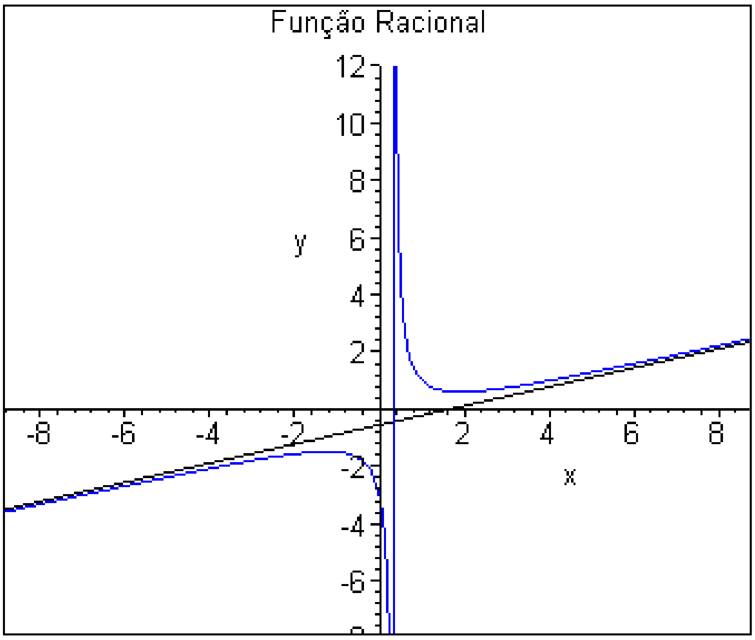
$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(\frac{1}{3}\right)\right)$$

> $x < \frac{1}{3}$ Concavidade voltada para baixo.

A função não tem pontos de inflexão.

- **Gráfico**

```
> plot([f(x),ff(x)],x=-5..10,y=-8..12,title="função racional");
```



- **Continuidade**

Pelo gráfico conclui-se que a função não é contínua no ponto 1/3.

```
> limit(f(x),x=1/3,right);
```

$$\infty$$

```
> limit(f(x),x=1/3,left);
```

$$-\infty$$

```
> f(1/3);
Error, (in f) numeric exception: division by zero
```

A função não é continua, uma vez que $\lim_{x \to \frac{1}{3}^{\pm}} f(x) \neq f(\frac{1}{3})$

- **Diferenciabilidade**

A função não é diferenciável no ponto 1/3, visto que não pertence ao domínio.

- **Contradomínio**

$D'f = \Re$

2. $g(x) = x + \sqrt{|x^2 - 1|}$

```
> g:=x->x+sqrt(abs(x^2-1));
```

$$g := x \to x + \sqrt{|x^2 - 1|}$$

- **Dominio=** $\Re$

- **Intersecção como eixo dos xx**

```
> solve(x+sqrt(abs(x^2-1)));
```

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

```
> solve(g(x));
```

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- **Intersecção como eixo dos yy**

```
> subs(x=0,g(x));
```

$$\sqrt{|-1|}$$

- **Assimptota vertical**

Nãoexiste visto o dominio da função ser $\Re$

- **Assimptota Horizontal**

```
> limit(g(x),x=-infinity);
```

$$0$$

```
> limit(g(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

Portanto y=0 é Assimptota horizontal.

```
> ah:=0;
```

$$ah := 0$$

- **Assimptota oblíqua**

```
> m:=x->(g(x)/x);
```

$$m := x \to \frac{g(x)}{x}$$

```
> m1:=limit(m(x),x=infinity);
```

$$m1 := 2$$

```
> m2:=limit(m(x),x=-infinity);
```

$$m2 := 0$$

```
> b:=limit(g(x)-m1*x,x=infinity);
```

$$b := 0$$

```
> b:=limit(g(x)-m1*x,x=-infinity);
```

$$b := \infty$$

Portanto $y = 2x$ é Assimptota oblíqua.

```
> ao:=x->2*x;
```

$$ao := x \to 2\,x$$

- **Monotonia e extremos**

- No ramo de $]-\infty,-1] \cup]1,+\infty]$

```
> g1:=x->x+sqrt(x^2-1);
```

$$g1 := x \to x + \sqrt{x^2 - 1}$$

```
> Diff(g1(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\,\right)$$

```
> diff(g1(x),x);
```

$$1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

```
> g2:=simplify(%);
```

$$g2 := \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

```
> solve(g2=0);
> solve(g2>0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \infty)$$

A função é crescente em: $]1,+\infty[$

```
> solve(g2<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1))$$

A função é decrescente em: $]-\infty,-1[$

→ No ramo de $]-1,1[$

```
> g3:=x->x+sqrt(-x^2+1);
```

$$g3 := x \to x + \sqrt{-x^2+1}$$

```
> Diff(g3(x),x);
```

$$\frac{d}{dx}\left(x + \sqrt{-x^2+1}\right)$$

```
> diff(g3(x),x);
```

$$1 - \frac{x}{\sqrt{-x^2+1}}$$

```
> g4:=simplify(%);
```

$$g4 := -\frac{-\sqrt{-x^2+1}+x}{\sqrt{-x^2+1}}$$

```
> solve(g4=0);
```

$$\frac{\sqrt{2}}{2}$$

```
> solve(g4>0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}(-1), \mathrm{Open}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$$

A função é crescente em: $\left]-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$

```
>> solve(g4<0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \mathrm{Open}(1)\right)$$

A função é decrescente em: $\left]\frac{\sqrt{2}}{2},1\right[$

- **Concavidade e pontos de inflexão**

2ª Derivada – No ramo de $]-\infty,-1]\cup]1,+\infty]$

```
> > g1:=x->x+sqrt(x^2-1);
```

$$g1 := x \to x + \sqrt{x^2-1}$$

```
> Diff(g1(x),x,x);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

```
> diff(g1(x),x,x);
```

$$-\frac{x^2}{(x^2-1)^{(3/2)}}+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

```
> g2:=simplify(%);
```

$$g2 := -\frac{1}{(x^2-1)^{(3/2)}}$$

```
> solve(g2=0);
> solve(g2>0);
> solve(g2<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(1), \infty)$$

> Concavidade voltada para baixo de: $]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$

- No ramo de $]-1,1[$

```
> g3:=x->x+sqrt(-x^2+1);
```

$$g3 := x \to x+\sqrt{-x^2+1}$$

```
> Diff(g3(x),x,x);
```

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x+\sqrt{-x^2+1}\right)$$

```
> diff(g3(x),x,x);
```

$$-\frac{x^2}{(-x^2+1)^{(3/2)}}-\frac{1}{\sqrt{-x^2+1}}$$

```
> g4:=simplify(%);
```

$$g4 := \frac{1}{(x^2-1)\sqrt{-x^2+1}}$$

```
> solve(g4=0);
> solve(g4>0);
> solve(g4<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \mathrm{Open}(1))$$

> Concavidade voltada para baixo de: $]-1,1[$

Pontos de inflexão (1,1) e (-1,-1).

```
> g(1);
```

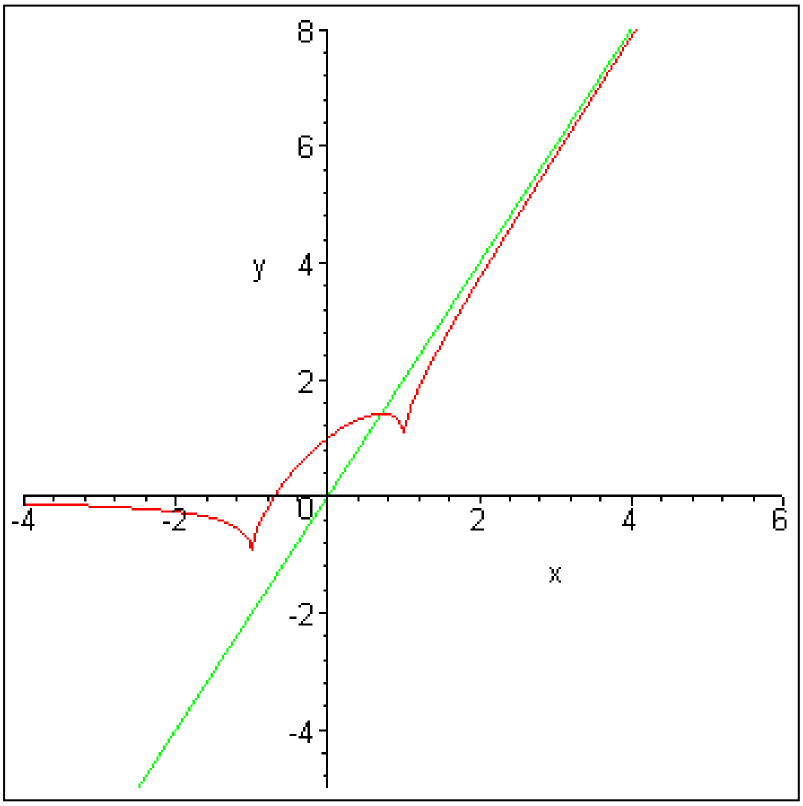
$$1$$

```
> g(-1);
```

$$-1$$

❖ **Gráfico**

➢ `plot([g(x),gg(x)],x=-4..6,y=-5..8);`



❖ **Continuidade**

Pelo grafico conclui-se que a função contínua.

❖ **Diferenciabilidade**

No ponto 1

```
> t:=x->(g(x)-g(1))/(x-1);
```

$$t := x \to \frac{g(x) - g(1)}{x - 1}$$

```
> t1:=limit(t(x),x=1);
```

$$t1 := \infty$$

A função não é diferenciável visto limite ser finito.

No ponto -1

```
> t:=x->(g(x)-g(-1))/(x+1);
```

$$t := x \to \frac{g(x) - g(-1)}{x+1}$$

```
> t1:=limit(t(x),x=-1);
```

$$t1 := undefined$$

- A função não é diferenciável no ponto -1.

- **Contradomínio**

$D'g =]-1, +\infty[$

3. $h(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$

```
> h:=x->(x+2)/sqrt(x^2+1);
```

$$h := x \to \frac{x+2}{\sqrt{x^2+1}}$$

- **Domínio:** $\Re$

- **Intersecção do gráfico com o eixo dos xx**

```
> solve(x+2);
```

-2

```
> solve(h(X));
```

-2

- **Intersecção do gráfico com o eixo dos yy**

```
> subs(x=0,h(x));
```

2

- **Assimptota vertical-**não existe visto o domínio da função ser $\Re$

- **Assimptota Horizontal**

```
> limit(h(x),x=-infinity);
```

-1

```
> limit(h(x),x=infinity);
```

$$1$$

Portanto $y=1\,e\;y=-1$ são Assimptotas horizontais.

- **Assimptota Oblíqua**

```
> m:=x->(h(x)/x);
```

$$m := x \to \frac{\mathrm{h}(x)}{x}$$

```
> m1:=limit(m(x),x=infinity);
```

$$m1 := 0$$

```
> m2:=limit(m(x),x=-infinity);
```

$$m2 := 0$$

Não existe Assimptotas oblíqua uma vez que m=0.

- **Monotonia e extremos**

1ª derivada

```
> diff(h(x),x);
```

$$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - \frac{(x+2)\,x}{(x^2+1)^{(3/2)}}$$

```
> h1:=simplify(%);
```

$$h1 := -\frac{-1+2\,x}{(x^2+1)^{(3/2)}}$$

```
> solve(h1=0);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> solve(h1>0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty, \mathrm{Open}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

A função é crescente em: $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

```
> solve(h1<0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{2}\right), \infty\right)$$

A função é decrescente em: $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$

A função tem um máximo : $\sqrt{5}$

```
> h (1/2);
```

$$\sqrt{5}$$

- **Concavidade e pontos de inflexão**

2.ª derivada

```
> diff(h(x),x,x);
```

$$-\frac{2\,x}{(x^2+1)^{(3/2)}}+\frac{3\,(x+2)\,x^2}{(x^2+1)^{(5/2)}}-\frac{x+2}{(x^2+1)^{(3/2)}}$$

```
> h2:=simplify(%);
```

$$h2 := \frac{-3\,x+4\,x^2-2}{(x^2+1)^{(5/2)}}$$

```
> solve(h2=0);
```

$$\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{41}}{8},\ \frac{3}{8}-\frac{\sqrt{41}}{8}$$

```
> solve(h2>0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(-\infty,\ \mathrm{Open}\left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{41}}{8}\right)\right),\ \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{41}}{8}\right),\ \infty\right)$$

Concavidade voltada para cima de : $\left]-\infty,\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{41}}{8}\right[\ \cup\ \left]\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{41}}{8},+\infty\right[$

```
> solve(h2<0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{41}}{8}\right),\ \mathrm{Open}\left(\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{41}}{8}\right)\right)$$

Concavidade voltada para baixo: $\left]\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{41}}{8},\frac{3}{8}+\frac{\sqrt{41}}{8}\right[$

A função tem pontos de inflexão:

```
> h(3/8)-sqrt41/8;
```

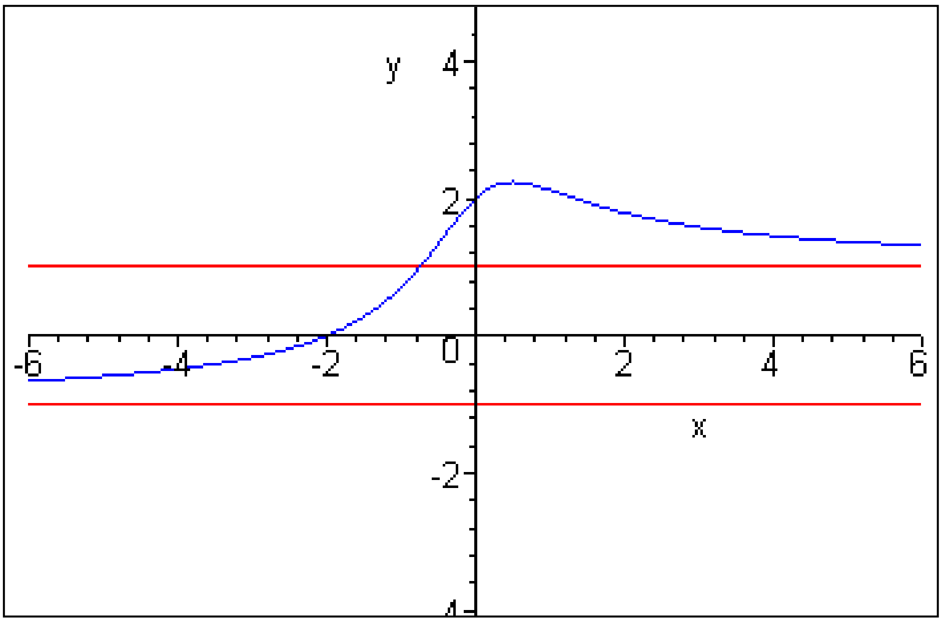
$$\frac{19\sqrt{73}}{73}-\frac{\mathrm{sqrt41}}{8}$$

```
> h(3/8)+sqrt41/8;
```

$$\frac{19\sqrt{73}}{73}+\frac{\mathrm{sqrt41}}{8}$$

❖ **Gráfico**

➢ **plot([h(x),hh(x)],x=-4..10,y=-2..4);**



❖ **Continuidade**

Através do gráfico conclui-se que a função é contínua em todo o seu domínio.

❖ **Diferencialbilidade**

A função é diferenciável em todo o seu domínio.

❖ **Contradomínio**

$D'h = \left]-1, \sqrt{5}\right]$

4. $p(x) = \log\left|\dfrac{x+2}{3-x}\right|$

> **p:=x->log(abs((x+2)/(3-x)));**

$$p := x \to \log\left(\left|\frac{x+2}{3-x}\right|\right)$$

- **Dominio:**

$Dp = \Re \setminus \{-2, 3\}$

- **Intersecção com o eixo dos xx**

```
> solve(p(x));
```

$$\frac{1}{2}$$

- **Intersecção com o eixo dos yy**

```
> subs(x=0,p(x));
```

$$\ln\left(\left|\frac{2}{3}\right|\right)$$

- **Assimptota vertical**

```
> limit(p(x),x=-2,left);
```

$$-\infty$$

```
> limit(p(x),x=-2,right);
```

$$-\infty$$

```
> limit(p(x),x=3,right);
```

$$\infty$$

```
> limit(p(x),x=3,left);
```

$$\infty$$

Portanto, $x = -2$ e $x = 3$ é assimptota vertical.

```
> av:=-2;
```

$$av := -2$$

```
> av:=3;
```

$$av := 3$$

- **Assimptota horizontal**

```
> limit(p(x),x=infinity);
```

$$0$$

```
> limit(p(x),x=-infinity);
```

$$0$$

Portanto $y = 0$ é assimptota horizontal.

- **Assimptota oblíqua**

```
> m:=x->(p(x)/x);
```

$$m := x \to \frac{\mathrm{p}(x)}{x}$$

```
> m1:=limit(m(x),x=infinity);
```

$$m1 := 0$$

```
> m1:=limit(m(x),x=-infinity);
```

$$m1 := 0$$

Não existe assimptota oblíqua visto m=0.

- **Monotonia e extremos**

```
> > p:=x->log((x+2)/(3-x));
```

$$p := x \to \log\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$$

```
> diff(p(x),x);
```

$$\frac{\left(\frac{1}{3-x}+\frac{x+2}{(3-x)^2}\right)(3-x)}{x+2}$$

```
> p1:=simplify(%);
```

$$p1 := -\frac{5}{(x+2)\,(-3+x)}$$

```
> solve(p1=0);
> solve(p1>0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-2), \mathrm{Open}(3))$$

A função é crescente em: $]-2,3[$

```
> solve(p1<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-2)), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(3), \infty)$$

A função é decrescente em: $]-\infty,-2[\,\cup\,]3,+\infty[$

- **Concavidade e Pontos de inflexão**:

```
> diff(p(x),x,x);
```

$$\frac{\left(\frac{2}{(3-x)^2}+\frac{2\,(x+2)}{(3-x)^3}\right)(3-x)}{x+2}-\frac{\left(\frac{1}{3-x}+\frac{x+2}{(3-x)^2}\right)(3-x)}{(x+2)^2}-\frac{\frac{1}{3-x}+\frac{x+2}{(3-x)^2}}{x+2}$$

```
> p2:=simplify(%);
```

$$p2 := \frac{5\,(2\,x-1)}{(-3+x)^2\,(x+2)^2}$$

```
> solve(p2=0);
```

$$\frac{1}{2}$$

```
> solve(p2>0);
```

$$\mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}\left(\frac{1}{2}\right), \mathrm{Open}(3)\right), \mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(3), \infty)$$

Concavidade voltada para cima: $\left]\frac{1}{2}, 3\right[\cup \left]3, +\infty\right[$

```
> solve(p2<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-2)), \mathrm{RealRange}\left(\mathrm{Open}(-2), \mathrm{Open}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

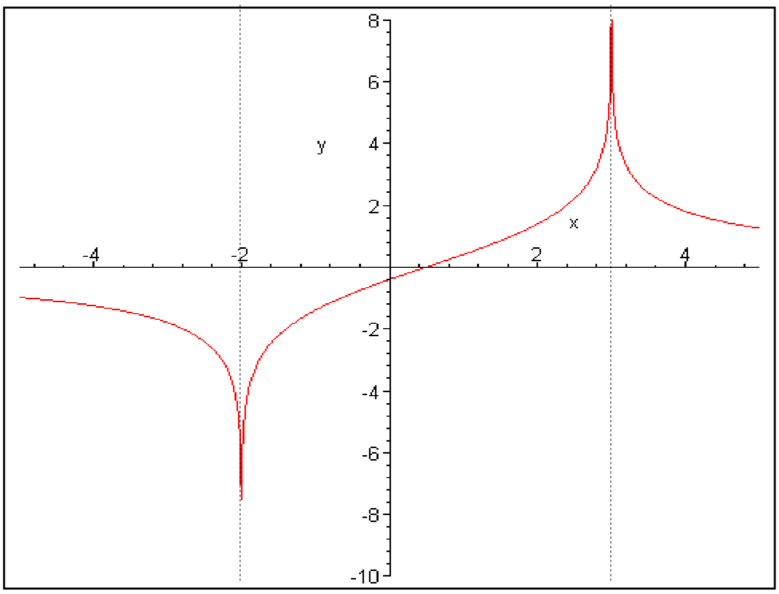
Concavidade voltada para baixo: $\left]-\infty, -2\right[\cup \left]-2, \frac{1}{2}\right[$

```
> p(1/2);
```

$$0$$

- **Gráfico**

```
> plot([p(x),pp(x)],x=-5..5,y=-10..8);
```



- **Continuidade**

Pelo gráfico conclui-se que a função não é contínua nos pontos -2 e 3.

```
> limit(p(x),x=-2, left);
```

$$-\infty$$

```
> limit(p(x),x=-2,right);
```

$$-\infty$$

```
> p(-2);
Error, (in ln) numeric exception: division by zero
```

```
> limit(p(x),x=3,right);
```

$$\infty$$

```
> limit(p(x),x=3,left);
```

$$\infty$$

```
> p(3);
Error, (in p) numeric exception: division by zero
```

> A função não é contínua nos pontos -2 e 3.

- **Diferenciabilidade**

A função não é diferenciável nos pontos -2 e 3.

- **Contradomínio**

$D'p = \Re$

5.

```
> i:=x->x*exp(x);
```

$$i := x \rightarrow x\,\mathbf{e}^{x}$$

- **Domínio**

$Di = \Re$

- **Intersecção com o eixo dos xx**

```
> solve(i(x));
```

$$0$$

- **Intersecção com o eixo dos yy**

```
> subs(x=0,i(x));
```

$$0$$

- **Assimptotas vertical**

Não existe assimptota vertical visto $Di = \Re$

- **Assimptotas Horizontal**

```
> limit(i(x),x=infinity);
```

$$\infty$$

```
> limit(i(x),x=-infinity);
```

$$0$$

Existe assimptota horizontal $y = 0$,pois $\lim_{x \to -\infty} i(x) = 0$

- **Assimptotas oblíqua**

```
> m:=x->(i(x)/x);
```

$$m := x \to \frac{\mathrm{i}(x)}{x}$$

```
> m1:=limit(m(x),x=infinity);
```

$$m1 := \infty$$

```
> m2:=limit(m(x),x=-infinity);
```

$$m2 := 0$$

Não existe assimptota oblíqua.

- **Monotonia e extremos**

```
> > diff(i(x),x);
```

$$\mathbf{e}^x + x\,\mathbf{e}^x$$

```
> i1:=simplify(%);
```

$$i1 := \mathbf{e}^x (1 + x)$$

```
> solve(i1=0);
```

$$-1$$

```
> solve(i1>0);
```

$$\mathrm{RealRange}(\mathrm{Open}(-1), \infty)$$

A função é crescente em**:** $]-1, +\infty[$

```
> solve(i1<0);
```

$$\mathrm{RealRange}(-\infty, \mathrm{Open}(-1))$$

A função é decrescente em: $]-\infty, -1[$

A função tem um minímo:

```
> i(-1);
```

$$-e^{(-1)}$$

- **Concavidade e pontos de inflexão**

```
> i2:=simplify(%);
```

$$i2 := e^x\,(2+x)$$

```
> solve(i2=0);
```

$$-2$$

```
> solve(i2>0);
```

$$\text{RealRange}(\text{Open}(-2), \infty)$$

A função é crescente em: $]-2,+\infty[$

```
> solve(i2<0);
```

$$\text{RealRange}(-\infty, \text{Open}(-2))$$

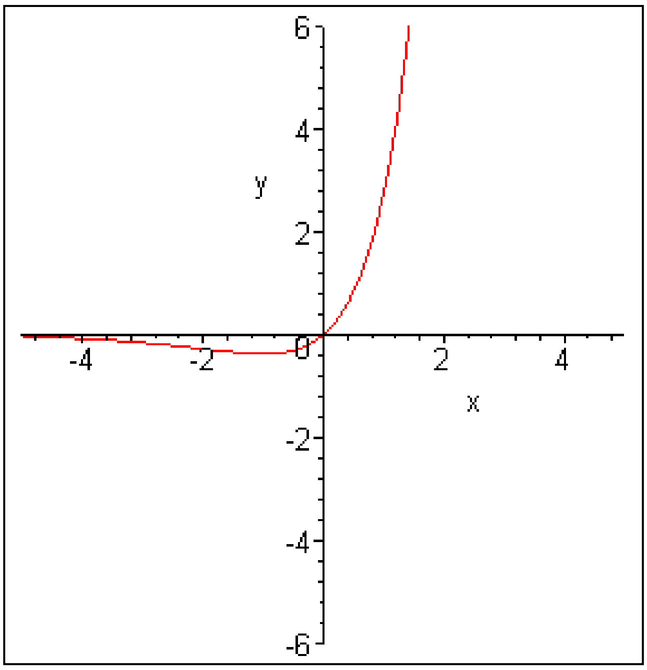
A função é decrescente em: $]-\infty,-2[$

Ponto de inflexão:

```
> i(-2);
```

$$-2\,e^{(-2)}$$

```
> plot([i(x),ii(x)],x=-5..5,y=-6..6);
```



- **Continuidade**

A função é continua continua em todo o seu domínio.

- **Diferenciabilidade**

A função é diferenciável em todo o seu domínio.

- **Contradomínio**

$$D'i = \left]-\frac{1}{e}, +\infty\right[$$

Comentários

O maple é um software de computação algébrica e simbólica extremamente eficiente com grande potencial em diversas áreas da Matematica tais como:geometria,cálculo diferencial, estatistica entre outros.

Ao iniciar o estudo de funções no Maple, a primeira coisa a saber fazer é como definir uma função e a maneira mais fácil é: f:=(variável->(expressões com variáveis);

- No estudo de funções podemos constatar que no Maple não existe um comando específico para determinar o domínio e o contradominio da função isso porque o maple opera com domínios e contradomínios subentendidos. Ao titulo de exemplo, na primeira função quando se pediu para calcular f(1/3) aparece um erro, isso porque este valor não pertence ao domínio de validade da função, enquanto que no método tradicional temos de identificar o tipo de função e determinar onde a função pode ou não ser definida;
- Ainda, na primeira função quando se pediu para calcular a interseçção com o eixo dos xx no maple aparecem raízes complexos ,isso porque o maple trabalha com raízes reais e complexos o que não será possível determinar no método tradicional ,uma vez que normalmente trabalhamos no conjunto $\Re$, os números complexos não fazem parte do programa curricular;

- Para determinar as assímptotas também não existe um comando específico mas como sabemos, para determinar as assimptotas temos de calcular os limites.Então existe um comando no maple limit que, depois de calcular devemos retirar as devidas ilações , como no método tradicional mas aqui é escrever a expressão o Maple fornece-nos o resultado emquanto que no método tradicional temos de saber o que determinar , como determinar e interpretar os resultados ;

- Nos cálculo das derivadas no método tradicional é obrigatório que o aluno memorize todas as regras para poder efectuar os mesmos e este por sua vez poderá ser muito extenso e morosso enquanto que no Maple é só utilizar o comando diff, mais rápido e prático.Podemos calcular a ordem da derivada que pretendemos mesmo sendo um número muito elevado em pouco tempo.

Exemplo: a derivada de ordem 8.

```
> f:=x->log((x+2)/(3-x));
```

$$f := x \to \log\left(\frac{x+2}{3-x}\right)$$

```
> diff(f(x),x$8);
```

$$-\frac{5040\left(\frac{1}{3-x}+\frac{x+2}{(3-x)^2}\right)(3-x)}{(x+2)^8}-\frac{210\left(\frac{120}{(3-x)^5}+\frac{120\,(x+2)}{(3-x)^6}\right)(3-x)}{(x+2)^4}$$
$$+\frac{5040\left(\frac{2}{(3-x)^2}+\frac{2\,(x+2)}{(3-x)^3}\right)(3-x)}{(x+2)^7}+\frac{840\left(\frac{24}{(3-x)^4}+\frac{24\,(x+2)}{(3-x)^5}\right)(3-x)}{(x+2)^5}$$
$$-\frac{5040\left(\frac{1}{3-x}+\frac{x+2}{(3-x)^2}\right)}{(x+2)^7}-\frac{210\left(\frac{120}{(3-x)^5}+\frac{120\,(x+2)}{(3-x)^6}\right)}{(x+2)^3}$$
$$+\frac{42\left(\frac{720}{(3-x)^6}+\frac{720\,(x+2)}{(3-x)^7}\right)}{(x+2)^2}+\frac{840\left(\frac{24}{(3-x)^4}+\frac{24\,(x+2)}{(3-x)^5}\right)}{(x+2)^4}$$
$$-\frac{2520\left(\frac{6}{(3-x)^3}+\frac{6\,(x+2)}{(3-x)^4}\right)}{(x+2)^5}-\frac{7\left(\frac{5040}{(3-x)^7}+\frac{5040\,(x+2)}{(3-x)^8}\right)}{x+2}$$
$$-\frac{2520\left(\frac{6}{(3-x)^3}+\frac{6\,(x+2)}{(3-x)^4}\right)(3-x)}{(x+2)^6}+\frac{5040\left(\frac{2}{(3-x)^2}+\frac{2\,(x+2)}{(3-x)^3}\right)}{(x+2)^6}$$
$$+\frac{42\left(\frac{720}{(3-x)^6}+\frac{720\,(x+2)}{(3-x)^7}\right)(3-x)}{(x+2)^3}-\frac{7\left(\frac{5040}{(3-x)^7}+\frac{5040\,(x+2)}{(3-x)^8}\right)(3-x)}{(x+2)^2}$$
$$+\frac{\left(\frac{40320}{(3-x)^8}+\frac{40320\,(x+2)}{(3-x)^9}\right)(3-x)}{x+2}$$

```
➢ simplify(%);
```

$$\frac{25200\,(-1261+3704\,x+3080\,x^3-910\,x^4+392\,x^5-28\,x^6+8\,x^7-3724\,x^2)}{(x+2)^8\,(-3+x)^8}$$

- Para estudar a continuidade no Maple é só construir o gráfco da função e calcular o limite da função no ponto onde o gráfico tem algum salto.Mas sendo o Maple um software que trabalha com domínio implicíto, facilita um pouco, uma vez que mesmo sendo os limites laterais diferentes , se o ponto não pertence o domínio da função,esta será descontinua nesse ponto. No método tradicional utilizamos o mesmo processo levando muito mais tempo;

- No estudo da monotonia depois de ter a derivada é só utilizar o comando solve para determinar os zeros se houver, onde a funçãoserá crescente e decrescente.

- No cálculo das derivadas no maple, temos uma vantagem porque ao calcular as derivadas podemos encontrar uma expressão um pouco difícil de simplificar é só utilizar o comando simplify. Mas no metodo tradicional , ás vezes torna fastidioso e cansativo .

- Para traçar o gráfico no método tradicional podemos iniciar por desenhar a medida que estudamos a função o que facilita muito ou no fim começamos mas com o maple o trabalho é facilitado e muito mais simples, até podemos acrescentar o titúlo , a cor , definir o dominio e o contradominio que pretendemos etc

- No maple, quando trabalhamos com função módulo também temos de desdobrar sobretudo no estudo das derivadas caso cotrário vamos ter uma vamos ter uma expressão "estranha" o que dificulta os próximos cálculos .

  Exemplo: `> p:=x->log(abs((x+2)/(3-x)));`

$$p := x \to \log\left(\left|\frac{x+2}{3-x}\right|\right)$$

`> diff(p(x),x);`

$$\frac{\operatorname{abs}\left(1, \frac{x+2}{3-x}\right)\left(\frac{1}{3-x}+\frac{x+2}{(3-x)^2}\right)}{\left|\frac{x+2}{3-x}\right|}$$

`> p1:=simmplify(%);`

$$p1 := \frac{5 \operatorname{abs}\left(1, -\frac{x+2}{x-3}\right)\left|\frac{x-3}{x+2}\right|}{(x-3)^2}$$

Em jeito de conclusão constatamos que ambos os métodos são de extrema importância uma complementa a outra. Para que haja sucesso nos estudos e no trabalho á que ter uma visão completa .

Alguns exercicíos propostos:

1. Estuda e representa graficamente as seguintes funções utilizando os dois métodos.

11. $f(x)=\dfrac{3x^3}{x^2-4}$

1.2 $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

2.**Os carros na auto-estrada**

A posição ,em relaçao a um ponto fixo p de dois automóveis, A e B , que se movem na mesma direcção em faixas paralelas numa auto–estrada é dada por: $s_1(t)=20t^2+15t+18$ para o carro A e $s_2(t)=6t^2+30t+5$ para o carro B .(S em metros e t em segundos)

2.1 Para t=0, qual dos carros vai á frente? Justifica.

2.2 Calcule o instante em que os carros se movem à mesma velocidade.

Capítulo v
CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

A Matematica é uma das disciplinas mais importantes no nosso plano curricular e as funções desempenham um papel preponderante no nosso programa de ensino mas também é uma das disciplinas onde os alunos revelam maiores dificuldades.

Sendo o Professor a pedra basilar neste processo de ensino e aprendizagem e sendo ele insubstituível ,pois o sucesso de uma aula depende da orientaçaõ que este dá aos alunos.O papel dele pode mudar mas nunca deixar de existir.

Como foi aqui abordado , com o desenvolvimento das NTIC surge uma nova postura do ser professor e é de salientar ainda que hoje em dia os alunos não apreendem somente na sala de aula e o professor já não é o detentor de todo o conhecimento assumindo o papel de orientador. Com toda essa revolução há que repensar em novas estratégias de ensino, apostar em métodos modernos, mais sofisticados sobretudo as NTI mas também nos softwares como forma de proporcionar desafios ,melhores condições e apostar num ensino de qualidade.

Quanto a nós professores temos de nos mostrar sempre disponível à mudança, sobretudo quando os benefícios são para todos os agentes educativos, isso porque muitas vezes parece que as NTIC representam um obstáculo incontornavél à frente deles e mostram-se irre resistentes , inflexíveis e achamdo que não são capazes – esta não deve ser a atitude de um professor. Devemos estar abertos à mudança e disponíveisl para apreender em todas as fases das nossas vidas.

É de realçar que os computadores e utilização dos softwares não resolvem todos os problemas da Matemática mas contribuem de forma positiva uma vez que já existem estudos avançados sobre as vantagen dos mesmos.

Algumas Vantagens da utilização do computador no ensino da Matemática:

- Permite adequar o ensino às necessidades de cada aluno;

- Permite controlar de maneira contínua certas fases do processo ensino aprendizagem;
- O aluno fica com o registo da conversa que teve com o computador etc.
- O aluno avalia a sua própria aprendizagem no maple

- Liberta os alunos de memorizar muitos conteúdos, tratando-os todos de forma igual , visto não ter sensibilidade humana.

Qaunto aos softwares hà que ter em conta sobretudo, dois asspectos fundamentais na selecção e a avaliação uma vez que um software tem de ser primeiro de tudo educativo e pedagógico e não um software que pensa pelo aluno, que chama ao aluno de burrinho e que causa insegurança.

O Maple é um sistema de computação algébrica e simbólica bastante popular nos meios académicos e cientifícos sendo capaz de efectuar operações simbólicas e cálculos complexos de uma maneira simples , é muito potente e muito rápido , possui uma unidade de ajuda on-line compreensível onde são encontradas todas as explicações possíveis o que ajuda os alunos no seu processo de ensino aprendizagem. Ainda, o maple oferece várias facilidades e tambem é de fácil aplicação não só no ramo da Matemática mas tambem em outros ramos da ciência .

O método tradicional de abordagens de funções também é importante , não devemos desprezá-la, mas sim conciliar as duas formas, uma vez que o programa pode omitir erros, e os alunos devem ter esta capacidade e postura crítica.

Com este estudo não queremos dizer que o método utilizado não é correcto, talvez a forma de como esta a ser abordada não é a mais adequada.

Com o estudo deste tema espera-se ter abordado uma nova perspectiva e técnicas de ensino e espera-se ainda sobretudo melhorar a qualidade de ensino, melhores resultados e rentabilizar o tempo e que as aulas de Matematica passarão a ser mais vivas, dinâmicas onde os alunos possam discutir ,confrontar com novas ideias , desenvolver a sua capacidade de pesquisa e do trabalho em grupo .

Sendo o Maple um software onde se utiliza uma linguagem simples e dispondo de ajuda , facilidades, espera-se que com isso numa aula de Matematica de 50 minutos onde na maioria das vezes quando abordamos o estudo de funções normalmente pelo método tradicional não conseguimos fazer um estudo completo de uma função com este software estudar funções fica facilitado e traz muitas outras vantagens tais como : aula dinamica, interactiva e de interajuda, algumas lacunas sobretudo no12ºano poderá desaparecer ,neste ciclo reina muita pressão ,e a falta de tempo é uma constante, consequentemente o não cumprimento do programa o que contribui muitas vezes com que o conteudo sobre estudo completo de funções seja abordada de forma deficiente onde não haverá lugar para as aulas práticas .

Espero ainda que com a utilização deste software alçancar o sucesso do ensino aprendizagem sobretudo o sucesso na disciplina de Matemática e muita participação dos alunos uma vez que nesta fase já estão familiarizados com o computador e sabemos que os alunos são muito curiosos em relação aos computadores e passam horas e horas á frente e não sentem aborrecidos e nem cansados descobrem coisas fantástica .

Ainda com o uso do sofware espera-se proporcionar trabalhos de grupo , apresentar desafios aos alunos sobretudo no estudo completo de funções uma vez que são abordados de ums forma superficial e   como já tinha dito o estudo de funções é um dos contéudos mais importantes em Matemática havendo ainda escolas que não conseguem abordar o referido item não esquecendo das derivadas de funções logaritmica e exponencial ,que como se sabe também são muito importantes uma vez que tudo cresce exponencailmente.

Com este trabalho não se esgota o tema , uma vez este contéudo é riquíssima e existem varios métodos diferentes para abordar o mesmo assunto e sendo assim, o trabalho fica em aberto para os que queiram melhorar e eriquecer o mesmo.

BIBLIOGRAFIA

PONTE, João Pedro de. **Computador um instrumento da educação - Educação Hoje.** Lisboa. Porto editora.1ª edição 1986.

MARIANI, Viviana Cocco. **Maple fundamentos e aplicação**. Rio de Janeiro. LTC. 2005

NEVES, Maria Augusta Ferreira. VIEIRA, Maria Teresa Coutinho. **Matemática 12ºano-parte 2**. Porto editora. (S.D)

NEVES, Maria Augusta Ferreira. **Funções 3 Matemática 12ºano**. Lisboa. Porto editora. 2001.

AZEVEDO, Mário. **Teses, Relatórios e trabalhos Escolares Sugestões para Estruturação da Escrita.** Lisboa. Universidade Católica.2000**.**

PISKOUNOV**,** N. **Cálculo Diferencial e Integral.** Porto. Edições Lopes Da Silva. 1993.

ABRANTES, Paulo. CARVALHO, Raul Fernandes**. O novo M11.**Texto Editora.1991.

SITES CONSULTADOS

PONTE, João Pedro da, Presidente do Departamento de Educação da
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. JANUÁRIO Carlos., Departamento de Ciências de Educação da
Faculdade de Motricidade Humana, Universidade Técnica de Lisboa. FERREIRA Isabel Calado, Departamento de Física da Universidade do Minho. CRUZ Isabel Vice-Reitora da Universidade do Algarve. **O Ensino da Matemática na sociedade da Informação**. http://www.meioclique.com/CRUP/Documentos%20PDF/forminicialqualidade.pdf.
Acedido em: 31.03.07.

PONTE, João Pedro da. **Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação**1.Universidade de Lisboa.1992
(http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/92-Ponte(Ericeira).pdf.
Acedido em 1.03.07)

CABRITA, Isabel. FERNANDES, António de Sá. **Análise de um ambiente dinâmico de geometria dinâmica – *Cabri-Geomètre.***

DDTE – Universidade de Aveiro icabrita@dte.ua.pt. renatasilva@netcabo.pt
Acedido em: 31.03.07

VARANDAS, José Manuel. OLIVEIRA, Hélia. PONTE, João Pedro da. **A Internet na Formação de Professores.** *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa.*
www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/99-Varandas-etc(profMat-ICM).doc

Acedido em: 31.03.07

GRAVINA, Maria Alice. SANTANA, Maria Lucília. **A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados – iv congresso ribie.**

Brasília.1998.Ism.dei.uc.pt/ribie/docfiles/txt200342413933117.pdf

Acedido em: 6/11/07

ÁLVAREZ, Ainhoa Ochoa, MATEO, Eduardo Granados. **Aprenda Maple 8 como si Estuviera en primero**. San Sebastián, Nov 2002.

Citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/similar?doi=10.1.1.17.7000&type=cc

Acedido em: 8 / 10/ 2007

CORLESS, Robert Maple. **Essential Maple 8**. London. 1995.
Product.half.ebay.com/_W0QQprZ159719
Acedido em: 6/11/07